УДК 514.764.2

О спектре оператора кривизны конформно (полу)плоских римановых метрик*

Е.Д. Родионов[1], *В.В. Славский*[2], *О.П. Хромова*[1]

[1] Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)
[2] Югорский государственный университет (Ханты-Мансийск, Россия)

On the Curvature Operator Spectrum of (Half)Conformally Flat Riemannian Metrics

E.D. Rodionov[1], *V.V. Slavskii*[2], *O.P. Khromova*[1]

[1] Altai State University (Barnaul, Russia)
[2] Yugra State University (Khanty-Mansiysk, Russia))

При исследовании римановых многообразий важное значение имеет установление связи между различными типами кривизны и топологией риманова пространства. Одной из особых кривизн при этом является секционная кривизна. Наиболее наглядными примерами этого являются теоремы Адамара — Картана, М. Громова, теорема о сфере, теорема сравнения углов треугольника А.Д. Александрова — В.А. Топоногова, уравнения теории относительности А. Эйнштейна и ряд других результатов. В общем случае задача исследования римановых многообразий с ограничениями на секционную кривизну представляется достаточно сложной. Естественно поэтому рассматривать ее в классе однородных римановых пространств, в частности в классе групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой. В данном направлении хорошо известны результаты М. Берже, С. Аллофа — Н. Уоллача, ряда других математиков по исследованию однородных римановых многообразий положительной секционной кривизны. Другим естественным ограничением является изучение секционной кривизны, а также ее оператора в классе конформно плоских римановых метрик. Данный класс метрик допускает удобное аналитическое представление, а спектр оператора секционной кривизны тесно связан с секционной кривизной. Исследован спектр оператора секционной кривизны конформно плоских римановых многообразий. Кроме того, изучен спектр оператора секционной кривизны в случае конформно полуплоских метрических групп Ли.

Ключевые слова: спектр оператора кривизны, конформно (полу)плоские метрики.

An establishment of communication between various types of curvature and topology of a Riemannian space is important for the research of Riemannian manifolds. The sectional curvature is one of the special types of curvatures. Some of the most known examples are Hadamard — Cartan's theorem, M. Gromov's theorem, the sphere theorem, the A.D. Alexandrov — V.A. Toponogov's theorem of comparison of a triangle corners, the equations of A. Einstein's theory of relativity, and some other results. Generally, a study of Riemannian manifolds with restrictions on the sectional curvature is assumed to be complicated. Therefore, it would appear reasonable to consider the study in a class of homogeneous Riemannian spaces, and, in particular, in a class of Lie groups with left invariant Riemannian metrics. In this direction there are well-known M. Berger's, S. Alloff — N. Wallach's research results and research results of some other mathematicians. Another natural restriction is a study of the sectional curvature and its operator in a class of conformally flat Riemannian metrics. This class of metrics allows convenient analytical representation, and the spectrum of the sectional curvature operator of such metrics is closely connected with the sectional curvature. In this paper, the sectional curvature operator spectrum of conformally flat Riemannian manifolds is investigated. Besides, the spectrum of the sectional curvature operator is investigated for the case of half conformally flat metric Lie groups.

Key words: spectrum of the curvature operator, (half)conformally flat metrics.

DOI 10.14258/izvasu(2015)1.1-19

*Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант НШ–2263.2014.1), гранта Правительства РФ (госконтракт № 14.B25.31.0029), Министерства образования и науки РФ (код проекта: 1148), а также в рамках программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «АлтГУ» (№ 2014.312.1.4).

Введение. Исследованию спектров дифференциальных операторов римановых многообразий посвящены работы многих математиков [1]. В этой области интересен как сам вопрос определения спектра дифференциального оператора для данного риманова многообразия, так и обратная задача о восстановлении метрики риманова многообразия по заданному спектру.

Не менее актуальной является проблема изоспектральности многообразий, так как существует ряд примеров изоспектральных, но неизометричных многообразий, а также известны примеры многообразий, для которых понятия изоспектральности и изометричности совпадают (см., например: [1–4]).

В классической постановке задачи изоспектральной геометрии ставятся для оператора Лапласа [1]. Вместе с тем существуют и другие дифференциальные операторы, характеризующие риманово многообразие в той или иной мере, спектр которых необходимо исследовать. К таким, например, относится оператор кривизны риманова многообразия.

В данной работе исследуется спектр оператора кривизны конформно (полу)плоских римановых многообразий. Для четырехмерных конформно (полу)плоских групп Ли с левоинваринтной римановой метрикой спектры оператора кривизны определены в явном виде. Установлено, какие из 4-мерных алгебр Ли конформно (полу)плоских групп Ли являются изоспектральными, а какие удовлетворяют (анти)условию Торпа [5; 6].

1. Предварительные результаты. Пусть (M^n, g) – риманово многообразие размерности n; X, Y, Z, V – векторные поля на M^n. Обозначим через ∇ связность Леви — Чивита и через $R(X,Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X,Y]}Z$ – тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r и скалярную кривизну s определим соответственно как $r(X,Y) = \mathrm{tr}(V \to R(X,V)Y)$ и $s = \mathrm{tr}(r)$. Разделим тензор кривизны R на метрический тензор g в смысле произведения Кулкарни — Номидзу [7, с. 70], получим тензор Вейля W и тензор одномерной кривизны A:

$$R = W + A \owedge g, \tag{1}$$

где

$$\begin{gathered}(A \owedge g)(X,Y,Z,V) = A(X,Z)g(Y,V) + \\ + A(Y,V)g(X,Z) - A(X,V)g(Y,Z) - \\ - A(Y,Z)g(X,V),\end{gathered}$$

$$A = \frac{1}{n-2}\left(r - \frac{sg}{2(n-1)}\right). \tag{2}$$

Определение 1. Риманово многообразие (M^n, g) называется *конформно плоским*, если его тензор Вейля тривиален.

Риманова метрика g индуцирует скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в слоях пространства расслоения $\Lambda^2 M^n$ по правилу $\langle X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2 \rangle_x = \det(g_x(X_i, Y_j))$, $x \in M^n$.

Риманову тензору кривизны R в любой точке $x \in M^n$ можно поставить в соответствие оператор кривизны, определяемый на бивекторах $\mathcal{R} : \Lambda^2_x M^n \to \Lambda^2_x M^n$, и задаваемый равенством

$$\langle X \wedge Y, \mathcal{R}(T \wedge V) \rangle_x = R_x(X,Y,T,V), \tag{3}$$

где $R_x(X,Y,T,V) = g_x(R(X,Y)T,V)$.

Рассмотрим ортобазис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ в некоторой точке $x \in M^n$, в котором одновременно диагонализируемы оператор Риччи и оператор одномерной кривизны. Он существует, так как эти операторы самосопряжены и связаны формулой (2). Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть (M^n, g) — конформно плоское риманово многообразие, т.е. $W = 0$. Рассмотрим ортобазис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ в точке $x \in M^n$, в котором диагонализируемы операторы Риччи r и одномерной кривизны A. Тогда в базисе $\{e_i \wedge e_j\}_{i<j}$, диагонализируем оператор кривизны $\mathcal{R} : \Lambda^2 M^n \to \Lambda^2 M^n$, причем спектр оператора $\mathcal{R}$ есть $\{K_{ij}\}_{i<j}$, где $K_{ij} = K_\sigma(e_i \wedge e_j)$ — секционная кривизна в направлении $\sigma = e_i \wedge e_j$.*

Доказательство. Заметим, что равенство (1) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned}R(X,Y,Z,V) = &\begin{vmatrix} A(X,Z) & A(X,V) \\ g(Y,Z) & g(Y,V) \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} g(X,Z) & g(X,V) \\ A(Y,Z) & A(Y,V) \end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{4}$$

Для конформно плоского риманова многообразия (M^n, g) фиксируем ортобазис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ в точке $x \in M^n$, в котором диагонализируемы операторы Риччи r и одномерной кривизны A, и рассмотрим разложение (4) в координатном виде. Ввиду симметрий тензора кривизны можно считать, что для $R_{ijkt} = R(e_i, e_j, e_k, e_t)$ возможны два случая: $i = k$ и $i < k$.

Если $i = k$, то либо $j = t$, и в фиксированном базисе $R_{ijij} = \begin{vmatrix} a_i & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_j \end{vmatrix} = a_i + a_j = K_{ij}$, где a_i, a_j — собственные значения оператора A, либо $j < t$, и в фиксированном базисе, используя (4), имеем $R_{ijit} = 0$.

Если $i < k$, то аналогичными рассуждениями из (4) заключаем $R_{i,j,k,t} = 0$.

Применяя формулу (3) и найденные компоненты тензора кривизны, получаем требуемое.

Рассмотрим конформную деформацию $\bar{g} = e^{2f(x)}g$ исходной метрики g на многообразии M^n.

Теорема 2. *Пусть (M^n, g) — конформно плоское риманово многообразие, т. е. $W = 0$.*

Тогда для конформно деформированного риманова многообразия $(\bar{M}^n, \bar{g})$ существует ортобазис $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\} \subset T_x\bar{M}^n$ такой, что в базисе $\{\bar{e}_i \wedge \bar{e}_j\}_{i<j}$, диагонализируем оператор кривизны $\bar{\mathcal{R}} : \Lambda^2\bar{M}^n \to \Lambda^2\bar{M}^n$, причем спектр оператора $\bar{\mathcal{R}}$ есть $\{\bar{K}_{ij}\}_{i<j}$, где $\bar{K}_{ij} = \bar{K}_\sigma(\bar{e}_i \wedge \bar{e}_j)$, и справедливы формулы

$$\bar{K}_{ij} = K_{ij} - (f_{,ii} + f_{,jj}) + (f_{,i})^2 + \\ +(f_{,j})^2 - f_{,k}f^k_{,}e^{-2f}\delta_{ij}, \quad (5)$$

где $f_{,i}$; $f_{,ij}$ — ковариантные производные функции конформной деформации f относительно начальной метрики.

Доказательство. Действительно, так как при конформной деформации тензор Вейля W инвариантен, то $\bar{W} = 0$, а значит, существование искомого базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ следует из теоремы 1. Далее согласно [8] имеем $\bar{A}_{ij} = A_{ij} - f_{,ij} + f_{,i}f_{,j} - (1/2)f_{,k}f^k_{,}g_{ij}$, где $g_{ij} = e^{-2f}\bar{g}_{ij} = e^{-2f}\delta_{ij}$. Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что для конформно плоских метрик секционная и одномерная кривизны связаны формулами $K_{ij} = A_{ii} + A_{jj}$, (см., например: [8]).

Следствие. *Базисы $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ теорем 1 и 2 отличаются друг от друга на суперпозицию конформного и ортогонального преобразований.*

Рассмотрим более подробно однородный риманов случай. Тогда из теорем 1, 2 и теоремы Алексеевского — Кимельфельда [9] следует теорема 3.

Теорема 3. *Пусть (M^n, g) — связное конформно плоское риманово многообразие, допускающее транзитивную группу конформных преобразований. Тогда существует ортобазис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset T_xM^n$ такой, что в базисе $\{e_i \wedge e_j\}_{i<j}$, диагонализируем оператор кривизны $\mathcal{R} : \Lambda^2M^n \to \Lambda^2M^n$, причем спектр оператора кривизны $\mathcal{R}$ есть $K_{ij} = K_{ij}(AK) - (f_{,ii} + f_{,jj}) + (f_{,i})^2 + (f_{,j})^2 - f_{,k}f^k_{,}e^{-2f}\delta_{ij}$, где $f_{,i}$; $f_{,ij}$ — ковариантные производные функции конформной деформации f относительно начальной метрики одного из конформно плоских многообразий списка Алексеевского — Кимельфельда [9], а $K_{ij}(AK)$ — секционная кривизна соответствующего пространства Алексеевского — Кимельфельда.*

2. Спектр оператора кривизны конформно плоских 4-мерных метрических групп Ли. Пусть далее $M = G$ — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\{\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]\}$ — соответствующая алгебра Ли. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множеством скалярных произведений в $\mathfrak{g}$ и множеством левоинвариантных римановых метрик в G (см.: [7]). Будем обозначать соответствующее скалярное произведение через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и называть пару $\{\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ *метрической алгеброй Ли.* Кроме того, будем предполагать, что $\dim G = 4$ и использовать обозначения работы [10].

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная 4-мерная алгебра Ли конформно плоской группы Ли G с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда в базисе теоремы 1 спектры оператора кривизны $\mathcal{R}$ определяются таблицей 1.*

Доказательство. Для каждой вещественной 4-мерной алгебры Ли группы Ли G, накладывая условие $W = 0$, определим согласно [10], какие из них являются конформно плоскими, и найдем их структурные константы:

1) $4\mathbb{A}_1$	$c^k_{ij} = 0\ \forall i,j,k = 1,2,3$;
2) $\mathbb{A}_{3,6} \oplus \mathbb{A}_1$	$c^1_{2,3} = C,\ c^2_{1,3} = -C$;
3) $\mathbb{A}_{3,9} \oplus \mathbb{A}_1$	$c^2_{1,3} = -c^3_{1,2} = -c^1_{2,3} = A\sqrt{1+M^2}$, $c^1_{2,4} = -c^2_{1,4} = AM\sqrt{1+M^2}$;
4) $\mathbb{A}_{3,3} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c^1_{1,3} = c^2_{2,3} = A$;
5) $\mathbb{A}^\alpha_{3,7} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c^1_{1,3} = c^2_{2,3} = \alpha L, c^1_{2,3} = -c^2_{1,3} = L$;
6) $\mathbb{A}^{\alpha,\beta}_{4,5}$	$c^1_{1,4} = c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = L$, $\alpha = \beta = 1$;
7) $\mathbb{A}^{\alpha,\beta}_{4,6}$	$c^1_{1,4} = c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = \alpha L$, $c^2_{3,4} = -c^3_{2,4} = L$, $\alpha = \beta$;
8) $\mathbb{A}_{4,12}$	$c^1_{1,3} = c^2_{2,3} = \sqrt{A^2+B^2}$, $c^1_{2,4} = -c^2_{1,4} = \dfrac{AD}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $c^1_{2,3} = -c^2_{1,3} = \dfrac{BD}{\sqrt{A^2+B^2}}$,

где $A > 0, B, C > 0, D > 0, L > 0, M$ — структурные константы; $\alpha > 0, \beta$ — определяющие параметры соответствующих алгебр Ли (см. подробнее: [10; 11]).

Перейдем к базису $\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}$ из собственных векторов оператора Риччи. В нем, согласно (2), диагонализируемы операторы Риччи r и одномерной кривизны A. Таким образом, мы находимся в условиях теоремы 1. Вычисляя секционные кривизны $K_{ij} = K_\sigma(e_i \wedge e_j)$, определяем тем самым компоненты спектра оператора кривизны вещественных 4-мерных алгебр Ли конформно плоских группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Теорема доказана.

Напомним, что если операторы Ходжа и кривизны коммутируют, т.е. выполняется условие $\mathcal{R}* = *\mathcal{R}$, то риманову метрику называют торповой. Если же операторы Ходжа и кривизны антикоммутируют, т.е. $\mathcal{R}* = -*\mathcal{R}$, то риманову метрику называют антиторповой (см., например: [5]).

Замечание. *На четырехмерном ориентированном римановом многообразии справедливы следующие утверждения. Метрика g является антиторповой тогда и только тогда, когда g — конформно плоская и имеет нулевую скалярную кривизну [5]. Метрика g является торповой тогда и только тогда, когда g — эйнштейнова [7].*

Таблица 1

Спектры оператора кривизны 4-мерных алгебр Ли конформно плоских групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой

№	Алгебра Ли	$\mathrm{spec}(\mathcal{R}) = \{K_{12}, K_{13}, K_{14}, K_{23}, K_{24}, K_{34}\}$
1	$4\mathbb{A}_1$	$\{0,0,0,0,0,0\}$
2	$\mathbb{A}_{3,6} \oplus \mathbb{A}_1$	$\{0,0,0,0,0,0\}$
3	$\mathbb{A}_{3,9} \oplus \mathbb{A}_1$	$\left\{\frac{A^2(1+M^2)}{4}, \frac{A^2(1+M^2)}{4}, 0, \frac{A^2(1+M^2)}{4}, 0, 0\right\}$, $A > 0$
4	$\mathbb{A}_{3,3} \oplus \mathbb{A}_1$	$\{-A^2, -A^2, 0, -A^2, 0, 0\}$, $A > 0$
5	$\mathbb{A}_{3,7}^{\alpha} \oplus \mathbb{A}_1$	$\{-\alpha^2L^2, -\alpha^2L^2, 0, -\alpha^2L^2, 0, 0\}$, $\alpha, L > 0$
6	$\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}$, $\alpha = \beta = 1$	$\{-L^2, -L^2, -L^2, -L^2, -L^2, -L^2\}$, $L > 0$
7	$\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\alpha}$, $\alpha, L > 0$	$\{-\alpha^2L^2, -\alpha^2L^2, -\alpha^2L^2, -\alpha^2L^2, -\alpha^2L^2, -\alpha^2L^2\}$
8	$\mathbb{A}_{4,12}$, $A > 0$	$\{-(A^2+B^2), -(A^2+B^2), 0, -(A^2+B^2), 0, 0\}$

Таблица 2

Спектры оператора кривизны 4-мерных алгебр Ли конформно полуплоских групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой

$\mathfrak{g}$	$\mathrm{spec}(\mathcal{R})$
$\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$	$\left\{-\frac{(23+\sqrt{145})H^2}{8}, -\frac{(23-\sqrt{145})H^2}{8}, -2H^2, -2H^2, -\frac{3H^2}{4}, -\frac{3H^2}{4}\right\}$, $\beta = 1$, $H > 0$
$\mathbb{A}_{4,11}^{\alpha}$	$\left\{-\frac{(23+\sqrt{145})\alpha^2H^2}{8}, -\frac{(23-\sqrt{145})\alpha^2H^2}{8}, -2\alpha^2H^2, -2\alpha^2H^2, -\frac{3\alpha^2H^2}{4}, -\frac{3\alpha^2H^2}{4}\right\}$, $\alpha > 0$, $H > 0$.

Следствие. *В условиях теоремы 4 в случае первых двух алгебр конформно плоские метрики являются антиторповыми. В случае третьей, четвертой, пятой и восьмой алгебр соответствующие метрики не являются ни торповыми, ни антиторповыми, а в случаях 6 и 7 метрики являются торповыми и эйнштейновыми.*

Следствие. *В условиях теоремы 4 изоспектральными (с точностью до множителя) являются следующие алгебры Ли:*

1) $4\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_{3,6} \oplus \mathbb{A}_1$;

2) $\mathbb{A}_{3,9} \oplus \mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_{3,3} \bigoplus \mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_{3,7}^{\alpha} \bigoplus \mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_{4,12}$;

3) $\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}$ и $\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$.

3. Спектр оператора кривизны конформно полуплоских 4-мерных метрических групп Ли. Теперь рассмотрим случай, когда метрика на римановом многообразии M не является конформно плоской, однако в определенном смысле близка к ней. Дополнительно будем считать, что $\dim M = 4$.

Определим *оператор Ходжа* $*$ как единственный изоморфизм векторных расслоений $* : \Lambda^2 M^4 \to \Lambda^2 M^4$, для которого $\langle \alpha, \beta \rangle \,\mathrm{vol} = \alpha \wedge (*\beta)$ для любых бивекторов $\alpha, \beta \in \Lambda_x^2 M^4$, $x \in M^4$, где vol — форма объема на M^4. Тогда матрицу оператора кривизны $\mathcal{R}$ в точке $x \in M^4$ относительно разложения пространства бивекторов в прямую сумму собственных подпространств, инвариантных относительно оператора Ходжа, можно представить в блочном виде [7]:

$$\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|c} W^+ + \frac{s}{12}\mathrm{Id} & Z \\ \hline Z^t & W^- + \frac{s}{12}\mathrm{Id} \end{array} \right), \qquad (6)$$

где W^+ и W^- — матрицы *автодуальной* и *антиавтодуальной* составляющих тензора Вейля W.

Определение 2. Риманово многообразие (M^4, g) называется *конформно полуплоским*, если автодуальная или антиавтодуальная составляющая его тензора Вейля тривиальна.

Пусть далее $M^4 = G$ — 4-мерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и алгеброй Ли $\{\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]\}$.

Лемма 1. *Пусть G — вещественная 4-мерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда G является конформно полуплоской в том и только в том случае, если выполняется одно из следующих условий: либо $W = 0$, либо в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G существует ортобазис, в котором структурные константы $\mathfrak{g}$ имеют вид:*

$c^1_{1,4} = 2H$, $c^1_{2,3} = c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = H > 0$ *либо* $c^1_{1,4} = 2H\alpha$, $c^1_{2,3} = c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = H\alpha$, $c^3_{2,4} = -c^2_{3,4} = -H$, $H > 0$, $\alpha > 0$.

Доказательство. Пусть G — вещественная 4-мерная группа Ли G с левоинвариантной римановой метрикой, и $W^+ = 0$. Тогда из [10] имеем $W = 0$. Пусть теперь $W^- = 0$. Тогда либо $W = 0$, либо алгебра Ли $\mathfrak{g}$ есть одна из алгебр: $\mathbb{A}^{\beta}_{4,9}$ с набором структурных констант $c^1_{1,4} = 2H$, $c^1_{2,3} = c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = H > 0$, $\beta = 1$ или с набором структурных констант $c^1_{1,4} = c^1_{2,3} = 2H$, $c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = H > 0$, $\beta = 1$; либо $\mathbb{A}^{\alpha}_{4,11}$ с набором структурных констант $c^1_{1,4} = 2H\alpha$, $c^1_{2,3} = c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = H\alpha$, $c^3_{2,4} = -c^2_{3,4} = -H$, $H > 0$, $\alpha > 0$ или с набором структурных констант $c^1_{1,4} = c^1_{2,3} = 2H\alpha$, $c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = H\alpha$, $c^3_{2,4} = -c^2_{3,4} = -H$, $H > 0$, $\alpha > 0$ (см.: [10]).

Рассмотрим алгебру Ли $\mathbb{A}^{\beta}_{4,9}$ с набором структурных констант $c^1_{1,4} = 2H$, $c^1_{2,3} = c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = H > 0$, $\beta = 1$ в ортобазисе $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Нетрудно проверить, что с помощью формул $e_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}e'_1$, $e_2 = ae'_1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}e'_2$, $e_3 = be'_1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}e'_3$, $e_4 = ce'_1 - be'_2 + ae'_3 + \frac{2}{\sqrt[3]{2}}e'_4$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ осуществляется переход к ортобазису $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$, в котором набор структурных констант алгебры Ли $\mathbb{A}^{\beta}_{4,9}$ имеет вид $c^1_{1,4} = c^1_{2,3} = 2H$, $c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = H > 0$, $\beta = 1$.

Рассмотрим алгебру Ли $\mathbb{A}^{\alpha}_{4,11}$ с набором структурных констант $c^1_{1,4} = 2H\alpha$, $c^1_{2,3} = c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = H\alpha$,$c^3_{2,4} = -c^2_{3,4} = -H$, $H > 0$, $\alpha > 0$ в ортобазисе $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Нетрудно проверить, что с помощью формул $e_1 = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}e'_1$, $e_2 = (a + c)\alpha e'_1 - \frac{\sqrt[3]{4}}{2}e'_2$, $e_3 = ae'_1 - \frac{\sqrt[3]{4}}{2}e'_3$, $e_4 = be'_1 - ce'_2 + \frac{(a+c)\alpha^2+a}{\alpha}e'_3 + \sqrt[3]{4}e'_4$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ осуществляется переход к ортобазису $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$, в котором набор структурных констант алгебры Ли $\mathbb{A}^{\beta}_{4,9}$ имеет вид $c^1_{1,4} = c^1_{2,3} = 2H\alpha$, $c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = H\alpha$, $c^3_{2,4} = -c^2_{3,4} = -H$, $H > 0$, $\alpha > 0$. Лемма доказана.

Любой ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ пространства T_xM определяет ортонормированный базис

$$\frac{e_1 \wedge e_2 \pm e_3 \wedge e_4}{\sqrt{2}}, \quad \frac{e_1 \wedge e_3 \pm e_4 \wedge e_2}{\sqrt{2}}, \quad \frac{e_1 \wedge e_4 \pm e_2 \wedge e_3}{\sqrt{2}} \tag{7}$$

пространства $\Lambda^{\pm}_x M$ (см., например: [7, с. 614]).

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная 4-мерная алгебра Ли группы Ли G с левоинвариантной конформно полуплоской римановой метрикой, отличной от конформно плоской. Тогда в базисе (7) матрица оператора кривизны имеет вид:*

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{11} & 0 & 0 & \mathcal{R}_{14} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{22} & 0 & 0 & \mathcal{R}_{25} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_{33} & 0 & 0 & \mathcal{R}_{36} \\ \mathcal{R}_{14} & 0 & 0 & \mathcal{R}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{25} & 0 & 0 & \mathcal{R}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_{36} & 0 & 0 & \mathcal{R}_{66} \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{R}_{11} = \dfrac{K_{12} + 2R_{1234} + K_{34}}{2}$, $\mathcal{R}_{14} = \dfrac{K_{12} - K_{34}}{2}$, $\mathcal{R}_{22} = \dfrac{K_{13} - 2R_{1324} + K_{24}}{2}$, $\mathcal{R}_{25} = \dfrac{K_{13} - K_{24}}{2}$, $\mathcal{R}_{33} = \dfrac{K_{14} + 2R_{1423} + K_{23}}{2}$, $\mathcal{R}_{36} = \dfrac{K_{14} - K_{23}}{2}$, $\mathcal{R}_{44} = \frac{K_{12} - 2R_{1234} + K_{34}}{2}$, $\mathcal{R}_{55} = \dfrac{K_{13} + 2R_{1324} + K_{24}}{2}$, $\mathcal{R}_{66} = \dfrac{K_{14} - 2R_{1423} + K_{23}}{2}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная 4-мерная алгебра Ли группы Ли G с левоинвариантной конформно полуплоской римановой метрикой, отличной от конформно плоской. Фиксируя соответствующий ортобазис леммы 1 и применяя формулы (1)–(3) и (6), вычисляем компоненты оператора кривизны, тензора кривизны и секционные кривизны алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (см. подробнее: [12–14]). В результате получаем требуемое.

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная 4-мерная алгебра Ли группы Ли G с левоинвариантной конформно полуплоской римановой метрикой, отличной от конформно плоской. Тогда спектр оператора кривизны $\mathcal{R}$ определяются таблицей 2.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная 4-мерная алгебра Ли группы Ли G с левоинвариантной конформно полуплоской римановой метрикой, отличной от конформно плоской. Используя матрицу оператора кривизны, полученную в лемме 2, нетрудно заметить, что собственные вектора и собственные значения оператора кривизны имеют вид:

$$v_1 = \left(0, 0, \frac{K_{14} - K_{23} + F1}{2R_{1423}}, 1, 0, 0\right),$$
$$v_2 = \left(0, 0, \frac{K_{14} - K_{23} - F1}{2R_{1423}}, 1, 0, 0\right),$$
$$v_3 = \left(0, \frac{K_{13} - K_{24} + F2}{2R_{1324}}, 0, 0, 1, 0\right),$$
$$v_4 = \left(0, \frac{K_{13} - K_{24} - F2}{2R_{1324}}, 0, 0, 1, 0\right),$$
$$v_5 = \left(\frac{K_{12} - K_{34} + F3}{2R_{1234}}, 0, 0, 0, 0, 1\right),$$
$$v_6 = \left(\frac{K_{12} - K_{34} - F3}{2R_{1234}}, 0, 0, 0, 0, 1\right),$$
$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(K_{14} + K_{23} + F1), \lambda_2 = \frac{1}{2}(K_{14} + K_{23} - F1),$$
$$\lambda_3 = \frac{1}{2}(K_{13} + K_{24} + F2), \lambda_4 = \frac{1}{2}(K_{13} + K_{24} - F2),$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{2}(K_{12} + K_{34} + F3), \lambda_6 = \frac{1}{2}(K_{12} + K_{34} - F3),$$

где $F1 = \sqrt{(K_{23} - K_{14})^2 + 4(R_{1423})^2}$,
$F2 = \sqrt{(K_{24} - K_{13})^2 + 4(R_{1324})^2}$,
$F3 = \sqrt{(K_{12} - K_{34})^2 + 4(R_{1234})^2}$.

Фиксируя ортобазис леммы 1 в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, определим компоненты тензора кривизны, секционные кривизны, а значит, и спектр оператора кривизны через структурные константы алгебры Ли. Тем самым получим требуемое.

Следствие. *В условиях теоремы 5 конформно полуплоские алгебры Ли являются изоспектральными (с точностью до множителя). Соответствующие метрики не являются ни торповыми, ни антиторповыми.*

Заметим, что и для конформно полуплоских метрик существует ортонормированный базис, в котором в матрице оператора кривизны на главной диагонали стоят секционные кривизны.

Перейдем к базису внешних форм:

$$v_1 = e_1 \wedge e_2, v_2 = e_1 \wedge e_3, v_3 = e_1 \wedge e_4,$$
$$v_4 = e_2 \wedge e_3, v_5 = e_2 \wedge e_4, v_6 = e_3 \wedge e_4. \quad (8)$$

Предложение. *Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная 4-мерная алгебра Ли группы Ли G с левоинвариантной конформно полуплоской римановой метрикой. Тогда существует базис $\{e_i \wedge e_j\}_{i<j}$ такой, что в матрице оператора кривизны на главной диагонали стоят секционные кривизны $K_\sigma(e_i \wedge e_j)$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная 4-мерная алгебра Ли группы Ли G с левоинвариантной римановой метрикой, и $W^+ = 0$. Тогда из [10] имеем $W = 0$, и согласно теореме 1 получаем требуемое. Пусть теперь $W^- = 0$. Тогда либо $W = 0$, и согласно теореме 1 получаем требуемое, либо мы попадаем в условия леммы 2. Переходя от базиса (7) к базису (8) и пересчитывая компоненты оператора кривизны, получаем

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{1234} \\ 0 & K_{13} & 0 & 0 & R_{1324} & 0 \\ 0 & 0 & K_{14} & R_{1423} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{1423} & K_{23} & 0 & 0 \\ 0 & R_{1324} & 0 & 0 & K_{24} & 0 \\ R_{1234} & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{34} \end{pmatrix},$$

где K_{ls}, R_{ijkt} — компоненты секционной кривизны и тензора кривизны в базисе (7). Доказательство завершено.

Библиографический список

1. Berge M. A Panoramic View of Riemannian Geometry. — Berlin, 2002.

2. Исангулов Р.Р. Изоспектральные плоские 3-многообразия // Сиб. матем. журн. — 2004. — Т. 45, № 5.

3. Gordon C.S. Survey of Isospectral Manifolds // Handbook of Differential Geometry. — Amsterdam, 2000. — V. I.

4. Kac M. Can One Hear the Shape of a Drum? // Amer. Math. Monthly. — 1966. — № 73.

5. Ким Х., Ким Дж. Об одном эквивалентном условии плоской метрики // Сиб. матем. журн. — 2003. — Т. 44, № 5.

6. Singer I.M., Thorpe J.A. The curvature of 4-dimensional Einstein spaces // Global Analisis, Papers in Honour of K. Kodarira. — Tokyo, 1969.

7. Бессе А. Многообразия Эйнштейна / пер. с англ. : в 2 т. — М., 1990.

8. Nikonorov Yu.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. Geometry of homogeneous Riemannian manifolds // Journal of Mathematical Sciences. — 2007. — Vol. 146, № 6.

9. Алексеевский Д.В., Кимельфельд Б.Н. Классификация однородных конформно плоских римановых многообразий // Математические заметки. — 1978. — Т. 24, № 1.

10. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О гармонических тензорах на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // Владикавказский математический журнал. — 2011. — Т. 13, № 3.

11. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О спектре оператора кривизны конформно плоских римановых многообразий // ДАН. — 2013. — Т. 450, № 2.

12. Гладунова О.П., Оскорбин Д.Н. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2013. — № 1/1.

13. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. О вычислении спектра оператора кривизны конформно (полу)плоских римановых метрик // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2013. — № 1/2.

14. Оскорбин Д. Н., Родионов Е. Д. О спектре оператора кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой // ДАН. — 2013. — Т. 450, № 2.