УДК 519.7

Математические вопросы моделирования взаимодействия ледового покрова и гидроупругих волн*

К.А. Шишмарев

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Mathematical Problems of Ice Sheet and Hydroelastic Waves Interaction Modeling

K.A. Shishmarev

Altai State University (Barnaul, Russia)

Рассмотрены проблемы моделирования взаимодействия ледового покрова и гидроупругих волн. В качестве основной модели используются уравнение колебаний тонкой упругой пластины. Описано линейное уравнение тонкой пластины. Рассмотрены основные предположения в моделировании ледового покрова как упругой пластины, а также задачи о прогибе безграничной ледовой пластины под действием движущейся нагрузки. Приведена постановка задачи о движении нагрузки вдоль непрерывного ледового покрова. Приведены примеры моделирования трещин и ударных импульсов. Описаны методы и результаты численных исследований. Предлагаемый метод расчета возможен как при прямолинейном, так и при криволинейном движении нагрузки. Охарактеризовано взаимодействие ледового покрова и строений. Описаны случаи взаимодействия льда с одной стенкой и ледового покрова в канале, закрепленного на двух стенках. Особенностью задачи поведения ледового покрова в канале является учет только гидродинамического давления, а внешняя нагрузка отсутствует. Приведены результаты численных расчетов. Рассмотрены проблемы влияния снега и температурных напряжений на параметры ледового покрова. Приведено уравнение малых колебаний плавающей вязкоупругой ледовой пластины, покрытой снежным покровом. Приведены результаты сравнения численных расчетов рассматриваемых задач с опытными данными.

Ключевые слова: ледовый покров, гидроупругие волны, движущаяся нагрузка.

DOI 10.14258/izvasu(2015)1.1-22

In this paper, problems of ice sheet and hydroelastic waves interaction simulation are studied. Linear equation of thin elastic plate is used as a basic model. Topicality of the problem is described in introduction. Linear equation of thin plate is studied in section 1. Basic assumptions of the elastic plate model for ice sheet modeling are considered. Problems of infinite ice sheet deflection under a moving load are investigated in section 2. Problem formulation for the load motion along a continuous ice cover is provided along with the examples of cracks and shock pulses modeling. Methods and results of numerical studies are considered. The proposed method of calculation can be used for rectilinear and curvilinear motions of the load. Problems of the ice sheet and buildings interaction are investigated for cases of the ice sheet interaction with one wall and the ice sheet clamped to the channel walls (section 3). A specific feature of the problem of ice sheet behavior in a channel is that only hydrodynamic pressure is considered with no external load. Results of numerical calculations are discussed. Influence of snow and temperature stresses on ice sheet parameters is investigated in section 4. A small oscillation equation for a floating viscoelastic ice plate covered with snow is presented. Comparison of numerical calculations with experimental data is discussed.

Key words: Ice sheet, hydroelastic waves, moving loads.

*Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства №2014/2, грантов РФФИ №13-08-01097 и №13-01-98016.

Введение. В связи с активным освоением шельфа северных морей, разработкой северных нефтяных месторождений, а также актуальными проблемами разрушения льда в каналах и транспортировки грузов вдоль замороженных водоемов в зимнее время задачи о гидроупругом и термодинамическом поведении ледового покрова привлекают все большее внимание исследователей в течение последнего времени.

Наиболее изученным является поведение ледового покрова под действием гидроупругих волн, когда ледовый покров моделируется упругой тонкой пластиной. Нестационарное взаимодействие упругих пластин с жидкостью на протяжении многих лет активно изучается во всем мире, поскольку оно тесно связано с задачами на прочность в корабельной гидродинамике, а также с задачами, возникающими при построении сложных плавающих гидротехнических сооружений. Многочисленные исследования посвящены воздействию волн, распространяющихся в ледовом покрове, на морские сооружения, такие как вертикальные колонны платформ и стенки. Показано, что даже волны малой амплитуды приводят к большим силам и моментам, действующим на находящиеся в контакте со льдом сооружения.

Задачи гидроупругости исследуются в течение последних лет с целью создания математических моделей взаимодействия упругих пластин с жидкостью, а также методов определения нестационарного напряженного состояния упругих пластин, находящихся в полном или частичном контакте с жидкостью. Наиболее важным моментом для получения корректных результатов является решение совместных задач об упругом поведении тела и движении жидкости.

Целью данной работы является исследование проблем, постановок и методов решения задач взаимодействия ледового покрова и гидроупругих волн.

1. Основные теоретические предположения при моделировании ледовых пластин. Линейное уравнение тонкой пластины подробно изучено в работах [1–3]. Идея моделирования ледового покрова как упругой тонкой пластиной состоит в том, что волны, распространяющиеся вдоль пластины, имеют малую амплитуду по сравнению с их длиной, и, следовательно, присутствуют только малые значения изгибов пластины. Основные предположения сформулированы в теории Кирхгофа — Лява и имеют следующий вид:

1) прогиб срединной поверхности пластины мал по сравнению с толщиной льда, следовательно, можно считать угол наклона пластины при изгибе незначительным;

2) в результате изгиба середина пластины остается недеформированной;

3) участки пластины, изначально перпендикулярные средней поверхности, остаются перпендикулярными и после прогиба пластины, это означает, что вертикальные деформации сдвига незначительны (гипотеза плоских сечений);

4) нормальные напряжения, приложенные к середине пластины, малы по сравнению с другими компонентами напряжения, и ими можно пренебречь.

Данные гипотезы являются упрощением уравнения балки Эйлера — Бернулли и позволяют применять данное уравнение для исследования тонких пластин.

Рассмотрим уравнение равновесия изгибного и крутящего моментов упругой пластины под действием некоторой внешней нагрузки q [2]:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + \\ + \frac{\rho_i h^3}{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \rho_i h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q, \quad (1)$$

где h — толщина льда, ρ_i — плотность льда; $w(x,y,t)$ — вертикальный прогиб пластины; M_1 и M_2 — изгибающие моменты; M_{12} — крутящий момент. Пластина расположена в плоскости xOy. Представим моменты сил в терминах перемещений w:

$$M_1 = -EJ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \quad (2)$$

$$M_2 = -EJ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^y} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \quad (3)$$

$$M_{12} = -EJ(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (4)$$

где EJ — изгибная жесткость упругой пластины; ν — коэффициент Пуассона для льда; E — модуль Юнга; $J = h^3/12(1-\nu^2)$. Подставляя (2)–(4) в (1), получим линейное уравнение Эйлера — Бернулли для упругой тонкой пластины

$$EJ\nabla^4 w + \rho_i h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad (5)$$

где бигармонический оператор ∇^4 имеет вид:

$$\nabla^4 = \nabla^2\nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \quad (6)$$

Уравнение (5) не включает эффект инерции вращения. Инерция вращения должна быть учтена, если нагрузка прилагается внезапно или если значение нагрузки осциллирует с высокой частотой. Тогда уравнение (5) примет следующий вид:

$$\left(D\nabla^2 - \frac{\rho_i h^3}{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\nabla^2 w + \rho_i h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q.$$

2. Математические модели ледового покрова как упругой бесконечной пластины. В работах [4–6] исследовалось напряженно-деформированное состояние ледового покрова при движении по нему внешней нагрузки. В статье [5] приводится постановка задачи относительно прогиба ледового покрова и предлагается метод численного решения полученной системы дифференциальных уравнений. Данный метод расчета возможен как при прямолинейном, так и при криволинейном движении нагрузки.

В качестве основных уравнений модели использовались уравнение вязкоупругих колебаний льда под действием движущейся нагрузки [3]

$$\frac{Gh^3}{3}\left(1+\tau_f\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^4 w+\rho_w g w+ \\ +\rho_i h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\rho_w\frac{\partial\Phi}{\partial t}=p(t)\ (z=0) \quad (7)$$

и уравнение Лапласа для потенциала скорости течения жидкости

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0, \quad (8)$$

где Φ — потенциал движения жидкости; G — модуль упругости льда при сдвиге; H — глубина бассейна; ρ_i, ρ_w — плотности льда и воды соответственно; g — ускорение силы тяжести; τ_f — время релаксации; p — интенсивность внешней нагрузки.

Система уравнений (7)–(8) замыкается граничными условиями на дне бассейна и на границе вода — лед

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0 \quad (z=-H); \quad (9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0 \quad (z=0). \quad (10)$$

Для численного решения задачи функции w и Φ представляются в виде конечных сумм

$$w=\sum_{m=1}^{n} w_m; \quad (11)$$

$$\Phi=\sum_{m=1}^{n}\varphi_m(x,y,t)\cosh(k_m(z+H)), \quad (12)$$

где $k_m=\mathrm{const}$.

Используя метод конечных элементов, строят дискретную модель ледовой пластины

$$w_m(x,y,t)=\sum_{i=1}^{n}N_i(x,y)q_{im}(t), \quad (13)$$

где $N_i(x,y)$ — функции формы; $q_{im}(t)$ — узловые перемещения; n — число узловых перемещений. Значение n определяется типом и количеством конечных элементов, образующих дискретную модель ледовой пластины. Необходимое для достижения заданной точности вычислений число конечных элементов оценивается отдельно для каждой задачи.

Подставляя (13) в (7)–(8), получаем систему матричных уравнений, для решения которой применяется метод конечных разностей [5]. С использованием изложенного алгоритма был решен ряд задач с различными законами движения нагрузки. Результаты расчетов, приведенные в [5], позволяют определить влияние упругого основания и учесть влияние ускорения нагрузки в начальный момент времени на состояние ледовой пластины. Кроме того, с помощью предложенного метода проводились исследования зависимости максимального прогиба ледового покрова от скорости движения нагрузки.

Разрушению ледового покрова в результате движения нагрузки предшествует появление трещин. При этом лед не разрушается сразу, а в течение некоторого времени сохраняет несущую способность. Поэтому для более полного исследования и определения параметров движения нагрузки в задачах о разрушении ледового покрова необходимо учитывать образование трещин. В работах [7; 8] исследовалось поведение ледового покрова с трещинами в результате движения нагрузки. За основу математической модели взяты уравнения (7)–(10) [3; 5].

При описании трещин использовались следующие предположения: при раскрытии трещины ее берега не смещаются относительно друг друга, а силы их взаимодействия перпендикулярны берегам и приводятся к распределенной моментной нагрузке, представляющей собой изгибающий момент на берегу трещины [9]. Тогда краевые условия на каждом берегу трещины будут иметь следующий вид [7]:

$$M_\xi=-D\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(w+\tau_f\frac{\partial w}{\partial t}\right)+ \\ +\nu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(w+\tau_f\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right), \quad (14)$$

где x — абсцисса данной точки; ξ, η — нормаль и касательная к линии трещины в этой точке в плоскости xOy; M_ξ — изгибающий момент на берегу трещины.

Численное решение данной задачи основывалось на методе для расчета напряженно-деформированного состояния ледового покрова при движении по нему внешней нагрузки. Метод представляет собой комбинацию метода конечных элементов и метода конечных разностей [5; 10]. При этом учет краевых условий на трещине приводит к изменению только значений матричных коэффициентов. Одним из этапов рассматриваемого численного метода является дискретизация пластины. Для учета краевых условий на трещине вводился конечный элемент, представляющий собой упругий шарнир. Проблемы моделирования сквозных трещин как шарниров подробно рассмотрены в работе [11].

Проведенные расчеты позволяют определить зависимость максимальных динамических прогибов скорости движения нагрузки, угол раскрытия трещины и изгибающий момент M, возникающий в сечении ледовой пластины под воздействием контактных напряжений.

Рассматриваемый численный метод применялся и для расчетов прогибов ледяного покрова при воздействии на него точечного ударного импульса [12]. Импульс моделировался как внезапно приложенная сила P в течение промежутка времени δt, малого по сравнению с периодом колебаний ледовой пластины. В этом случае внешнюю нагрузку p из уравнения (7) можно представить в виде:

$$p(x, y, t) = U\delta(x, y)\delta(t), \qquad (15)$$

где U — ударный импульс; $\delta(x, y)$, $\delta(t)$ — дельта-функции Дирака.

С использованием изложенного метода можно проводить расчеты при действии не одного, а нескольких импульсов. Полученные результаты описывают прогиб ледового покрова в различные моменты времени, прошедшие с момента приложения импульса [12].

3. Математические модели взаимодействия ледового покрова как упругой пластины и прилегающих строений. В работах [13–16] изучались гидроупругие волны в канале, покрытом льдом. Канал имеет прямоугольное сечение. Особенностью рассматриваемой задачи является учет только гидродинамического давления, а внешняя нагрузка на ледовый покров отсутствует. Основными являются уравнение тонкой пластины (5) и уравнение потенциала движения жидкости (8). Правая часть уравнения (5) в данном случае представляет давление воды и вычисляется из линеаризованного интеграла Бернулли

$$p(x, y, 0, t) = -\gamma\Phi_t(x, y, 0, t) - w(x, y, t), \qquad (16)$$

где $\gamma = b\omega^2/g$; $2b$ — ширина канала; ω — частота волн.

В отличие от ранее рассмотренных задач с бесконечным или полубесконечным ледовым покровом, в данной задаче ледовый покров имеет фиксированную ширину $2b$ и считается примороженным к стенкам канала. Соответствующие граничные условия определяются условиями жесткого закрепления для прогиба ледового покрова

$$w = w_y = 0 \quad (y = \pm b, \ -\infty < x < \infty). \qquad (17)$$

Граничные условия для потенциала (9)–(10) дополняются условиями непротекания на стенках канала

$$\Phi_y = 0 \quad (y = \pm b). \qquad (18)$$

Нетривиальные решения рассматриваемой задачи искались в виде бегущей волны:

$$w(x, y, t) = Re(F(y)\exp^{i(kx+t)}); \qquad (19)$$

$$\Phi(x, y, z, t) = Re(i\varphi(y, z)\exp^{i(kx+t)}), \qquad (20)$$

где k — безразмерное волновое число; $\varphi(y, z)$ — комплексно-значный потенциал, удовлетворяющий уравнению Гельмгольца

$$\varphi_{yy} + \varphi_{zz} = k^2\varphi \quad (-b < y < b, \ -H < z < 0). \qquad (21)$$

Задача формулировалась относительно профиля волн $F(y)$ поперек канала и решалась методом нормальных мод для канала конечной глубины и в рамках модели мелкой воды для канала малой глубины. Функция $F(y)$ представляется в виде ряда

$$F(y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\psi_j(y), \qquad (22)$$

где коэффициенты a_j подлежат определению, а функции $\psi_j(y)$ — нормальные моды защемленной балки, которые удовлетворяют задаче

$$\psi_j^{IV} = \lambda_j^4\psi_j \quad (-1 < y < 1),$$
$$\psi_j = \psi_j' = 0 \quad (y = \pm 1). \qquad (23)$$

Для определения коэффициентов a_j уравнение (22) подставлялось в уравнение пластины (5) и решалась полученная матричная задача.

В работе [13] определены дисперсионные соотношения гидроупругих волн и их характеристики. Показано, что модель мелкой воды хорошо предсказывает дисперсионные соотношения для длинных волн. Дисперсионное соотношение для волн, которые не осциллируют поперек канала, хорошо аппроксимируется дисперсионным соотношением для одномерных гидроупругих волн в бесконечном ледовом покрове. Исследованы поперечные профили гидроупругих волн, бегущих вдоль канала, и распределения изгибающих напряжений в этих волнах. Показано, что для длинных волн напряжения максимальны на стенках канала, а для коротких волн – вдоль центральной линии канала. В условиях проведенных расчетов отмечено, что изгибные напряжения поперек канала выше, чем напряжения вдоль канала.

Двумерные и трехмерные задачи о линейных гидроупругих волнах, отражающихся от тел с вертикальными стенками, изучались в работах [17–19]. Рассматривалась жидкость конечной глубины. Безграничный ледовый покров считался примороженным к вертикальной поверхности тела. В этом случае связанные задачи гидроупругости были решены с помощью интегральных преобразований. Кроме того, были исследованы прогиб льда и напряжения в ледовом покрове и определены вертикальные и горизонтальные силы, действующие на жесткие стенки.

4. Влияние температурных напряжений на ледовый покров. В работе [16] исследовалась модельная начально-краевая квазиизотермическая задача в случае, когда ледовый покров закреплен на стенках канала.

Уравнение прогиба (5) с учетом температурных напряжений примет вид:

$$mw_{tt} + D\nabla^4 w - \triangle(Q(x,y)w) = p(x,y,0,t)$$
$$(0 < y < b,\ -\infty < x < \infty),$$

где m — масса покрова на единицу площади ($m = \rho_i h_i$; h_i — толщина покрова); $Q(x,y)$ — температурные напряжения, связанные с образованием ледового покрова.

Для численного решения задачи применялся алгоритм разложения функции прогиба на моды, описанный в [13–15]. Численное решение проводилось в системе вычислений MatLab. Результаты позволяют определить прогиб ледового покрова и дисперсионные соотношения для заданного значения температуры.

В работе [20] представлена математическая модель для анализа напряженно-деформированного состояния ледяного покрова при динамических нагрузках с учетом наличия снежного покрова. Основным уравнением модели является уравнение малых колебаний плавающей вязкоупругой ледовой пластины [3]

$$\frac{G_m h^3}{3} Q\left(3P + \frac{GQ}{K}\right)\nabla^4 w = P\left(3P + \frac{2GQ}{K}\right)\times$$
$$\times\left(-q - \rho_w g w - \rho_i h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho_w \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\ (z=0), \quad (24)$$

где K — модуль объемного сжатия; P и Q — линейные дифференциальные операторы, выбираемые в соответствии с принятой реологической моделью льда [21]. Пренебрегая упругой сжимаемостью льда ($K \to \infty$), уравнению (24) придадим вид:

$$\frac{G_m h^3}{3} Q\nabla^4 w = (-q - \rho_w g w -$$
$$-\rho_i h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho_w \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big)\ (z=0). \quad (25)$$

В рассматриваемой работе изучалась задача, когда ледовый покров покрыт слоем снега толщиной h_s. Предполагалось, что эластичность снега пренебрежимо мала по сравнению с эластичностью ледовой пластины. Снег, покрывающий ледовый покров, может быть рассмотрен как слой вязкой жидкости с внутренним коэффициентом трения η_s [3]. Влияние сжатия снега непосредственно под движущейся нагрузкой на параметры гидроупругих волн не учитывалось, так как предполагается, что область сжатого снега мала по сравнению со всей областью вибрирующего ледового покрова. Следовательно, с учетом инерционных сил $\rho_s h_s \partial^2 w/\partial t^2$ и сил, вызванных вязкостью ледового покрова, $\eta_s h_s \partial\nabla^2 w/\partial t$, получим уравнение малых колебаний плавающей вязкоупругой ледовой пластины, покрытой снежным покровом

$$\frac{G_m h^3}{3} Q\nabla^4 w = (-q - \rho_w g w -$$
$$-(\rho_i h + \rho_s h_s)\frac{\rho_w w}{\partial t^2} - \eta_s h_s \frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 w -$$
$$- \rho_w w - \rho_w \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big)\ (z=0), \quad (26)$$

где

$$P = \tau_m^{-1} + \left(1 + \frac{G_m}{G_k}\frac{\tau_k}{\tau_m}\right)\frac{\partial}{\partial t} + \tau_k \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$Q = \frac{\partial}{\partial t} + \tau_k \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

где ρ_s — плотность снега; τ_m и τ_k — время релаксации в моделях Максвелла и Кельвина — Фойгта [21], G_m и G_k — соответствующие модули упругости льда при сдвиге.

В работе [20] проведены численные исследования, после чего полученные результаты были сопоставлены с экспериментальными данными. Анализ результатов показал, что предложенная модель может быть использована для расчета напряженно-деформированного состояния ледовых пластин с наличием снежного покрова. Полевые эксперименты [22] доказали, что бесснежные районы ледового покрова сломать легче, чем лед со слоем снега. Это указывает на необходимость коррекции известных данных о способности разрушения льда суднами на воздушной подушке [22]. Использование полученных теоретических результатов определения максимально разрушаемой толщины льда с учетом снежного покрова обеспечит более эффективные работы по разрушению ледового покрова.

Заключение. В работе рассмотрены постановки и методы численного решения задач взаимодействия ледового покрова и гидроупругих волн. Полученные численные результаты показывают хорошую корреляцию с экспериментальными данными.

Большую помощь при обсуждении рассмотренных задач оказали Т.И. Хабахпашева, А.А. Коробкин и А.А. Папин. Автор выражает им искреннюю благодарность.

Библиографический список

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М., 1975.

2. Squire V., Hosking R., Kerr A., Langhorne P. Moving Loads on Ice. — Kluwer Academic Publishers, 1996.

3. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. — Л., 1967.

4. Жесткая В.Д., Козин В.М. Исследование напряженно-деформированного состояния полубесконечного ледяного покрова под действием движущейся нагрузки // ПМТФ. — 1994. — Т. 35, №5.

5. Жесткая В.Д. Численное решение задачи о движении нагрузки по ледяному покрову // ПМТФ. — 1998. — Т. 40, №4.

6. Squire V.A., Robinson W.H., Haskell T.G., Moore S.C. Dynamic Strain Response of Lake and Sea to Moving Loads // Cold Region Sci. and Technol. — 1985. — V. 11.

7. Жесткая В.Д., Джабраилов М.Р. Численное решение задачи о движении нагрузки по ледяному покрову с трещиной // ПМТФ. — 2008. — Т.49, №3.

8. Зуев В.А., Козин В.М. Использование судов на воздушной подушке для разрушения ледяного покрова. — Владивосток, 1988.

9. Зуев В.А., Грамузов Е.М., Двойченко Ю.А. Разрушение ледяного покрова // Материалы по обмену опытом. — Вып. 2. — Горький, 1989.

10. Жесткая В.Д., Козин В.М. Исследования возможностей разрушения ледяного покрова амфибийными судами на воздушной подушке резонансным методом. — Владивосток, 2003.

11. Джабраилов М.Р. Моделирование сквозных трещин в ледяном покрове при численном решении задачи о напряженно-деформированном состоянии ледяного покрова, находящегося под действием движущейся нагрузки // Проблемы механики сплошных сред и смежные вопросы технологии машиностроения : сб. докл. 2-й конф. — Владивосток, 2003.

12. Жесткая В.Д., Козин В.М. Численное решение задачи о воздействии ударного импульса на ледяной покров // ПМТФ. — 2008. — Т. 49, №2.

13. Korobkin A., Khabakhpasheva T., Papin A. Waves Propagating Along a Channel with Ice Cover // European Journal of Mechanics B/Fluids. — 2014. — V. 47.

14. Коробкин А.А., Хабахпашева Т.И., Папин А.А. Математические модели снежно-ледового покрова. — Барнаул, 2013.

15. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Поведение ледового покрова канала под действием поверхностных волн // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2012. — №1/1 (73).

16. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Аналитическое и численное исследование квазиизотермической задачи взаимодействия ледового покрова канала и поверхностных волн // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2012. — №1/2(73).

17. Brocklehurst P. Hydroelastic Waves and Their Interaction with Fixed Structures : PhD Thesis / University of East Anglia. — UK, 2012.

18. Brocklehurst P., Korobkin A.A., Părău E.I. Interaction of Hydro-Elastic Waves with a Vertical Wall // J. Eng. Math. — 2010. — V. 68.

19. Brocklehurst P., Korobkin A.A., Părău E.I. Hydroelastic Wave Diffraction by a Vertical Cylinder // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2011. — V. 369.

20. Kozin V.M., Zemlyak V.L., Vereshchagin V.Yu. Influence of Snow Cover on the Parameters Flexural-Gravity Waves in Ice Cover // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2013. — Vol. 54, №3.

21. Filippov A.P. Steady-State Oscillations of an Infinitely Long Beam in an Elastic Half-Space under the Action of a Moving Force // Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Tekh. Nauk, Mekh. Mashinostr. — 1961. — No.6.

22. Kozin V.M. Resonance Method of Breaking of Ice Cover. Inventions and Experiments // Akad. Estestvoznaniya. — M., 2007.