УДК 517.988

О пределах монотонных последовательностей в AST

С.В. Дронов

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

On Limits of Monotone Sequences in the AST

S.V. Dronov

Altai State University (Barnaul, Russia)

В аксиоматике альтернативной теории множеств (AST), в рамках которой выполнена работа, рассматривается построение гипердействительных структур на основе горизонтов, представляющих собой начальные отрезки, сегменты класса натуральных чисел, более широкие, чем класс конечных натуральных чисел. Монотонные последовательности элементов такой гипердействительной структуры, даже являющиеся ограниченными, в отличие от классической ситуации, могут не иметь пределов. Ранее в исследованиях автора уже были получены необходимые и достаточные условия на основной сегмент структуры, при которых такая парадоксальная ситуация невозможна. В данной работе получены условия на скорость роста или убывания монотонной последовательности, при которых в заданной гипердействительной структуре она все же имеет предел. Исследована связь понятия предела с точными верхними и нижними гранями, изучены причины и механизмы отсутствия пределов. В качестве применения показано, что гармонический ряд в гипердействительной структуре сходится тогда и только тогда, когда основной сегмент является теоретико-множественно определимым, т.е. обладает четкой верхней границей.

Ключевые слова: альтернативная теория множеств, гипердействительные структуры, предел, монотонная последовательность, точная верхняя грань.

In axiomatics of the alternative set theory (AST), construction of some hyperreal structures is considered rather often. These structures are based on horizons that are initial segments or, in different terms, segments of the class of natural numbers. As a rule, they are wider than the class of all finite natural numbers. Contrary to the classical situation, monotone sequences of elements of such hyperreal structure may have no limits even if they are bounded. Necessary and sufficient conditions for a base segment of the structure when such paradoxical situation is impossible have been obtained already earlier. In this paper, we obtain conditions on the growth rate or decrease rate of monotone sequence with a limit within the given hyperreal structure. The relation between the limit and precise upper and lower boundaries of classes is investigated. Causes and mechanisms of limitlessness are examined. It is shown that harmonic series in a hyperreal structure converge if and only if the base segment of the structure is definable set-theoretically or, in other words, has an exact upper boundary.

Key words: alternative sets theory, hyperreal structures, limit, monotone sequence, exact upper boundary.

DOI 10.14258/izvasu(2016)1-19

1. Обоснование и постановка задачи. Теория пределов и ее простейший вариант, пределы числовых последовательностей, составляют основу классических курсов математического анализа, без подробного изучения которого невозможно представить себе математику в целом. Постоянно переиздаются классические учебники [1, 2], включающие эту теорию и в РФ, и за рубежом, а также появляются новые [3, 4].

Сегодня математика, а значит, и теория пределов все дальше выходят за рамки классических задач (см. [5, 6]), что приводит к необходимости переосмысливать и передоказывать уже, казалось бы, широко известные факты в новых условиях и новой аксиоматике.

Данная работа продолжает цикл статей автора по обоснованию основных результатов математического анализа в рамках альтернативной теории множеств (Alternative Set Theory, AST). Основные положения этой теории изложены в [7, 8]. Аксиоматика AST позволяет «заглянуть за горизонт» привычного класса натуральных чисел. Это достигается за счет отказа от свойства индуктивности класса всех натуральных чисел, что приводит к появлению внутри этого класса нечетких горизонтов, представляющих собой его начальные отрезки и называемых сегментами. Ближайший такой сегмент, интуитивно совпадающий с набором привычных в классической математике натуральных чисел (и являющийся индуктивным), называют классом конечных натуральных чисел и обозначают **FN**. Эта теория сегодня — одна из бурно развивающихся математических теорий, в рамках которой математика обретает новую интуицию, свежий взгляд на содержание классических задач, см., например, [9].

Как было показано в [10], в аксиоматике AST любая монотонная ограниченная последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда основной сегмент структуры является парафундаментальным, т.е. замкнут относительно произвольной возрастающей теоретико-множественной функции. Предположим, что основной сегмент изменять нельзя и поставим задачу поиска необходимых и достаточных условий для того, чтобы заданная монотонная последовательность имела бы предел. Решению этой задачи и некоторым применениям полученных условий и посвящена работа.

2. Основные понятия и обозначения. Дадим сейчас ряд используемых далее определений. Пусть $\mathbf{N}$ — класс натуральных чисел. Подкласс $A \subset \mathbf{N}$ назовем сегментом, если $1 \in A$ и для произвольных натуральных чисел $k < n$ из условия $n \in A$ следует $k \in A$. Сегмент назовем последовательным, если $(\forall n) n \in A \Rightarrow (n+1) \in A$. Известно, что если сегмент не является последовательным, то он совпадает с некоторым натуральным числом и, таким образом, теоретико-множественно определим.

Если при любых $n, k \in A$ $n + k \in A$, то сегмент A называют аддитивным, если же произведение $nk \in A$, — то мультипликативным. Каждый мультипликативный сегмент является аддитивным, а каждый аддитивный — последовательным. Условие аддитивности, например, эквивалентно тому, что для произвольного $n \in A$ также и $2n \in A$, оставаясь внутри сегмента. Если A — какой-то сегмент, то через $\mathbf{BQ}(A)$ договоримся обозначать класс тех рациональных чисел q, для которых при некотором $n \in A$ $|q| < n$. Во всем тексте далее все последовательности предполагаются теоретико-множественно определимыми и при фиксации основного сегмента A принимающими значения только в $\mathbf{BQ}(A)$.

Пусть $x_n,\ n \in A$ — последовательность. Число $x \in \mathbf{BQ}(A)$ называют ее A-пределом, если для любого $k \in A$ может быть указано $n_k \in A$ со свойством

$$(\forall n \in A)(n \geq n_k) \Rightarrow |x_n - x| \leq \frac{1}{k}. \qquad (1)$$

Ранее (см. [11]) уже отмечалось, что A-предел для данной последовательности не является единственным и становится таковым только после перехода к гипердействительной структуре, построенной по основному сегменту A.

Последовательность назовем A-ограниченной, если $(\exists k \in A)(\forall n \in A)\ |x_n| \leq k$. Будем называть ее A-фундаментальной, если для любого $k \in A$ найдется $n_k \in A$ такое, что

$$(\forall u, v \in A)\ (u, v \geq n_k) \Rightarrow |x_u - x_v| \leq \frac{1}{k}.$$

Договоримся о возможности опускать обозначение сегмента во всех терминах далее, если будет ясно, о каком именно сегменте идет речь.

Сходимость монотонных A-ограниченных последовательностей тесно связана со свойством парафундаментальности A (подробнее в [10]).

Лемма 1. *Для произвольного сегмента A существует содержащий его парафундаментальный сегмент $\bar{p}(A)$, минимальный по включению.*

Доказательство. В [10] было отмечено, что свойство парафундаментальности сегментов совпадает со свойством замкнутости их относительно специальным образом построенной операции на классе натуральных чисел. Поэтому из теоремы 4 в [12] вытекает, что для произвольного $n \in \mathbf{N}$ может быть построен минимальный по включению парафундаментальный сегмент $\bar{p}(n) \supset n$. Осталось выбрать $\bar{p}(A) = \cup\{\bar{p}(n),\ n \in A\}$.

3. Предел и супремум. Пусть сегмент A выбран и зафиксирован. В этом разделе будем рассматривать только неубывающие последовательности $\{x_n,\ n \in A\} \subset \mathbf{BQ}(A)$. Понятие предела такой последовательности в классической ситуации тесно ассоциировано с ее точной верхней гранью. Известно, что AST в силу особенности своей аксиоматики отрицает принцип Архимеда, из которого в классическом математическом анализе выводится существование подобных граней у любых ограниченных множеств. В силу этого уточним терминологию, связанную с точными верхними границами классов.

Пусть $X \subset \mathbf{BQ}(A)$ — произвольный класс. Число $a \in \mathbf{BQ}(A)$ назовем его A-супремумом и будем обозначать $\sup\limits_A X$, если $(\forall x \in X)\ x \leq a$ и

$$(\forall k \in A)(\exists x_k \in X)\ x_k > a - \frac{1}{k}.$$

Отметим, что, как и A-предел, A-супремум любого класса здесь не является единственным. Ясно, что понятие A-инфимума может быть определено полностью аналогично.

Теорема 1. *Пусть сегмент A аддитивен, x_n, $n \in A$ – неубывающая A-ограниченная последовательность. Она имеет предел в том и только том случае, когда имеет супремум, причем два этих числа можно выбрать совпадающими.*

Доказательство. Пусть сначала существует предел $z = \lim\limits_{n\in A} x_n$. Выберем монотонно возрастающую подпоследовательность x_{m_k} исходной последовательности так, чтобы

$$(\forall k \in A)\ x_{m_k}\ \le\ z + \frac{1}{k}.$$

Продолжим ее с сохранением этого условия до некоторого $\beta \notin A$, не нарушая свойства монотонности. Тогда

$$(\forall n \in A)\ x_n \le x_{m_\beta} \le z + \frac{1}{\beta}.$$

Для произвольного $k \in A$ в силу аддитивности верно $2k \in A$ и, по определению предела (1),

$$x_{n_{2k}} > z - \frac{1}{2k} > z + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{k}.$$

Итак, число $z + \frac{1}{\beta}$ удовлетворяет определению A-супремума. Более того, это же число удовлетворяет и определению A-предела, поскольку при $n > n_{2k}$

$$z + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{k} < z - \frac{1}{2k} < x_{n_{2k}} < x_n < z + \frac{1}{\beta},$$

поэтому предел и супремум можно выбрать равными.

Обратно. Пусть может быть указан $x = \sup\limits_A x_n$. По произвольному $k \in A$ выберем x_{n_k} так, чтобы

$$x - \frac{1}{k} < x_{n_k} \le x.$$

Тогда в силу монотонности последовательности

$$n \in A, n \ge n_k\ \Rightarrow x - \frac{1}{k} < x_n \le x,$$

а это означает, что x является пределом последовательности. Теорема доказана.

Сегмент A называется π-сегментом, если существует убывающая последовательность натуральных чисел $\alpha_n, n \in \mathbf{FN}$ такая, что $A = \cap\{\alpha_n,\ n \in \mathbf{FN}\}$. Из результатов [12] вытекает, что максимальный парафундаментальный сегмент, содержащийся в любом натуральном числе, всегда π-сегмент. Известно также, что для того чтобы основанная на каком-либо сегменте гипердействительная структура походила бы на класс действительных чисел, он не должен быть π-сегментом (см. [13]).

Лемма 2. *Для любой монотонно возрастающей последовательности может быть указано число $z \in \mathbf{Q}$ так, чтобы*

$$(\forall n \in A)\ x_n = z - \frac{1}{g(n)}, \qquad (2)$$

где $g(n)$ — монотонно возрастающая теоретико-множественно определимая функция. Если A не являлся π-сегментом, последовательность x_n была A-ограниченной, то z может быть выбрано элементом $\mathbf{BQ}(A)$, и тогда $g(n) \in \mathbf{BQ}(A)$ при всех $n \in A$.

Доказательство. Пусть сначала при $n \in A$ справедливо $x_n \le \gamma \in A$, и A не π-сегмент. Продолжим последовательность с сохранением монотонности и этого неравенства до некоторого $\alpha \notin A$. Используем лемму 1. A — не π-сегмент, значит, не может совпадать с максимальным парафундаменальным сегментом $\underline{p}(\alpha) \subset \alpha$. Тогда в силу свойства минимальности $\bar{p}(A)$ справедлива цепочка включений $\bar{p}(A) \subset \underline{p}(\alpha) \subset \alpha$. Привлекая результаты [10] и теорему 1, выводим существование $z = \sup\limits_{\bar{p}(A)} x_n$.

При этом, конечно же, выполнено $z \le \gamma$, откуда $z \in \mathbf{BQ}(A)$, и осталось выбрать

$$g(n)\ =\ \frac{1}{z - x_n},\ n \in A. \qquad (3)$$

Если же исходная последовательность не была A-ограниченной, то в качестве z можно выбрать любое число за горизонтом A и ввести g по той же формуле (3). Лемма доказана.

4. Монотонные последовательности специального вида. Утверждение леммы 2 позволяет ограничить наше рассмотрение последовательностями, заданными (2). В [10] показано, что если сегмент A аддитивен, то монотонные ограниченные последовательности имеют предел тогда и только тогда, когда они фундаментальны. В нашей ситуации фундаментальность означает, что

$$\begin{gathered}(\forall k \in A)\ (\exists n_k \in A)\ (\forall n, m \in A)\\ (n > m \ge n_k)\ \Rightarrow\ \tfrac{1}{g(m)} - \tfrac{1}{g(n)} \le \tfrac{1}{k}\,. \end{gathered} \qquad (4)$$

Ясно, что если

$$(\forall k \in A)\ (\exists n_k \in A)\ g(n_k) \ge k, \qquad (5)$$

то, используя монотонность g при $n > m \ge n_k$,

$$\frac{1}{g(m)} - \frac{1}{g(n)} < \frac{1}{g(m)} \le \frac{1}{k}.$$

Таким образом, (4) выполнено и x_n имеет предел. Свойство (5) можно, несколько расширяя определение, данное в [10], интерпретировать как замкнутость сегмента A относительно обратной к g функции g^{-1}. По-другому это же свойство можно понимать как ограничение сверху на скорость роста $g^{-1}(k)$ — ее значения не выходят за горизонт основного сегмента при k, находящихся перед этим горизонтом.

Выпишем в некотором смысле более слабое условие, устанавливающее ограничение на скорость роста g снизу.

$$(\forall k \in A)(\exists n_k, d_k \in A)\ g(n_k) \ge \left(1 + \frac{1}{d_k}\right) g(k). \qquad (6)$$

Если это условие нарушается, то для некоторого $k \in A$ и достаточно больших $n \in A$

$$(\forall d \in A)\ g(k) \le g(n) < \left(1 + \frac{1}{d}\right) g(k),$$

а значит, $g(n)$ A — неотличимо от $g(k)$ в терминах предыдущих работ автора. Таким образом, нарушение (6) означает фактически стабилизацию значений g, и, как следствие, последовательности x_n при достаточно больших значениях n, что делает ее дальнейшее исследование излишним.

Отметим также, что если $g(n)$ принимает значения только в $\mathbf{BQ}(A)$ при $n \in A$ (что, как было отмечено в лемме 2, всегда справедливо для ограниченных последовательностей x_n), и A аддитивен, то (6) является следствием (5). Действительно, тогда для произвольного $k \in A$ целая часть $[g(k)] \in A$, откуда $2[g(k)] + 1 \in A$. Из (5) вытекает, что можно подобрать $n_k \in A$ с условием

$$g(n_k)\ \ge\ 2[g(k)] + 1\ >\ 2g(k),$$

и (6) выполнено уже при $d_k = 1$.

Теорема 2. *Пусть сегмент A аддитивен и не является π-сегментом. Тогда последовательность вида (3) имеет предел, если выполнено (5). Если же (5) нарушено, но выполнено (6), то предел у нее отсутствует.*

Доказательство. Первое утверждение уже доказано. Пусть (5) нарушено, но (6) справедливо. Выберем $k \in A$ так, чтобы $g(n) \le k$ при всех $n \in A$. Если бы нашлось $m \in A$, для которого

$$g(m)\ >\ \frac{d_m}{d_m + 1} k, \qquad (7)$$

то из (6) и последнего неравенства мы бы получили

$$g(n_m) \ge \left(1 + \frac{1}{d_m}\right) g(m) > k,$$

что противоречило бы выбору k. Поэтому для произвольного $m \in A$ выполнено неравенство, противоположное (7), откуда, с привлечением (6), выводим

$$\frac{1}{g(m)} - \frac{1}{g(n_m)} \ge \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{d_m}}\right) \cdot \frac{1}{g(m)} \ge \frac{1}{k},$$

и утверждение теоремы следует из нарушения условия фундаментальности (4).

Завершим этот раздел двумя примерами. Пусть A — аддитивный, но не мультипликативный сегмент. Если $x_n = 1 - \frac{1}{n},\ n \in A$, то $g(n) = n$, (5) выполнено, и последовательность имеет предел, равный 1. Если же $x_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}},\ n \in A$, то предел не существует. Действительно, в A в силу его немультипликативности имеется такое число γ, что $\gamma^2 \notin A$. Тогда для выполнения условия $g(n) > \gamma$ необходимо $n > \gamma^2$, но внутри A такого числа найти нельзя. Поэтому (5) нарушено. В то же время, выбрав $n_k = 4k,\ d_k = 1$, нетрудно убедиться в справедливости (6). Заметим, что здесь отсутствие предела обосновано строго, в отличие от [10], где для этого же примера было лишь доказано, что 1 не может быть пределом рассматриваемой последовательности.

5. Гармонический ряд в AST. Одно из обычных применений теории возрастающих последовательностей — исследование сходимости рядов с положительными членами. Рассмотрим последовательность $a_n, n \in A$ элементов $\mathbf{BQ}(A)$, все члены которой неотрицательны. Ряд $\sum\limits_{j \in A} a_j$ сходится, если последовательность его частичных сумм $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j,\ n \in A$ имеет предел.

Некоторые свойства числовых рядов несложно могут быть перенесены из классической теории ([14]) с небольшими поправками на свойства основного сегмента.

Лемма 3. *Если ряд $\sum\limits_{j \in A} a_j$ сходится, то для любого $k \in A$ найдется $n_k \in A$ такое, что*

$$(\forall t, u \in A)\ (t, u \ge n_k) \Rightarrow |S_u - S_t| \le \frac{2}{k}. \qquad (8)$$

Если сегмент A дополнительно аддитивен, то (8) можно заменить на

$$(\forall t, p \in A)\ (t \ge n_k) \Rightarrow |S_{t+p} - S_t| \le \frac{1}{k}. \qquad (9)$$

Ясно, что (9) совпадает с критерием Коши сходимости ряда. Из результатов [10] следует, что для аддитивного сегмента это требование является необходимым и достаточным для сходимости.

Наконец, рассмотрим гармонический ряд $\sum\limits_{n \in A} \frac{1}{n}$. Учитывая то, что в AST число 0 принято считать натуральным, сделаем оговорку, что для гармонического ряда сумму будем начинать с $n = 1$.

Начнем со случая, когда $A = \alpha \in \mathbf{N}$. Почти очевидно, что в этом случае гармонический ряд сходится, и его сумма равна

$$z\ =\ 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{\alpha}.$$

Действительно, условие $z \in \mathbf{BQ}(A)$ здесь обеспечивается очевидным неравенством $z \le \alpha$, а определение предела (1) удовлетворяется выбором $n_k = \alpha - 1$ при всех $k \in A$.

Теорема 3. *Пусть A — последовательный сегмент. Тогда для частичных сумм гармонического ряда условие (5) нарушено, а (6) выполнено.*

Доказательство. Выберем произвольным образом натуральное число $\alpha \notin A$. Тогда при $n \in A$ для частичных сумм гармонического ряда

$$S_n \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{\alpha} = z.$$

Отсюда видно, что в обозначениях теоремы 2 можно взять

$$g(n) = \frac{1}{\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{\alpha}}\ ,\ n \in A. \qquad (10)$$

Значит, условие (5) для этой последовательности запишется в виде

$$(\forall k \in A)(\exists n \in A) \quad \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{k}. \qquad (11)$$

Пусть сначала A не является аддитивным. Возьмем такое $k \in A$, что $2k \notin A$. Можно без ограничения общности считать, что $2k < \alpha$. Тогда при произвольном $n \in A$

$$\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{\alpha} > \frac{\alpha - n}{\alpha} = 1 - \frac{n}{\alpha}.$$

Но $n + 2 \in A$, откуда по выбору α

$$\frac{n}{\alpha} < 1 - \frac{2}{\alpha} < 1 - \frac{1}{k}\,.$$

Поэтому

$$\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{k},$$

что противоречит (11), а значит, (5) нарушено.

Если же A аддитивен, то для всех его элементов n справедливо $2n < \alpha$, а следовательно,

$$\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

что вновь противоречит (11) уже при $k = 2$.

Займемся условием (6). В исследуемой ситуации оно означает, что для любого $k \in A$ можно указать $n_k, d_k \in A$ так, что $n_k > k$, и

$$\frac{1}{n_k+1} + ... + \frac{1}{\alpha} \le \frac{d_k}{1+d_k}\left(\frac{1}{k} + ... + \frac{1}{\alpha}\right),$$

или

$$\frac{1}{n_k+1} + ... + \frac{1}{\alpha} \le d_k\left(\frac{1}{k} + ... + \frac{1}{n_k}\right). \qquad (12)$$

Выбрав $n_k = d_k = k + 1 \in A$, видим, что

$$\frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{\alpha} \le \frac{\alpha-k+1}{\alpha} < 1,$$
$$(k+1)\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) > 2,$$

что подтверждает (12) и завершает доказательство теоремы.

Сравнивая полученное утверждение с теоремой 2, видим, что для аддитивных сегментов, не являющихся π-сегментами, расходимость гармонического ряда обоснована. В случае же лишь последовательного сегмента A нужное соотношение условий (5) и (6) имеет место, но это, к сожалению, не гарантирует расходимости ряда. Тем не менее справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Гармонический ряд сходится тогда и только тогда, когда основной сегмент теоретико-множественно определим, то есть является натуральным числом.*

Доказательство. Случай, когда сегмент A является натуральным числом, уже рассмотрен. Пусть A аддитивен. Тогда для любого $n \in A$ справедливо

$$\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} \ge \frac{1}{2},$$

что противоречит (9). Заметим, что это доказательство, совпадающее с классическим обоснованием расходимости гармонического ряда, не использует каких-либо свойств основного сегмента, кроме аддитивности. Но если таковая отсутствует, то $2n$ может выйти за пределы A. Для неаддитивного случая получим противоречие (8).

Возьмем $k \in A$ так, чтобы $2k \notin A$. Пусть $t \in A$ выбрано произвольно. Тогда $u = t + 4 \in A$ и имеет место $u < 2k \notin A$, откуда

$$S_u - S_t = \sum_{j=1}^{4} \frac{1}{t+j} > \frac{4}{t+4} > \frac{2}{k},$$

что дает требуемое противоречие и полностью завершает доказательство теоремы.

5. Обсуждение и выводы. Полученные результаты, на наш взгляд, позволяют понять, почему в аксиоматике AST монотонная ограниченная последовательность $x_n, n \in A$ может не иметь предела. Нам потребуется для этого еще одно определение.

Пусть A — какой-то сегмент, $z \in \mathbf{BQ}(A)$. Класс

$$M_A(z) \;=\; \left\{x \in \mathbf{Q} |\, (\forall k \in A)\, |x - z| < \frac{1}{k}\right\}$$

назовем монадой z относительно A. Это класс всех рациональных чисел, неотличимых от z при принятии A за основной сегмент. Именно эти числа отождествляются при построении соответствующей гипердействительной структуры.

Если основной сегмент A не является парафундаментальным (а иначе любая монотонная ограниченная последовательность предел имеет), рассмотрим максимальный парафундаментальный сегмент $\underline{p}(A) \subset A$. Тогда существует $\underline{p}(A)$-предел последовательности. Обозначим его z.

Это же число является $\underline{p}(A)$-супремумом x_n согласно теореме 1. Таким образом, последовательность «вплотную» подходит к границе монады

$$M_{\underline{p}(A)}(z) \;\supset M_A(z),$$

и то, что $z \ne \lim\limits_{n \in A} x_n$, возможно только в том случае, когда «за время» $A \backslash \underline{p}(A)$ последовательность «не успевает преодолеть зазор» между монадами и «зависает» внутри этого зазора.

Отсутствие эффекта «зависания» возможно в двух случаях: либо g растет достаточно быстро, либо практически не растет совсем, уже достигнув внутри $\underline{p}(A)$ своего потенциального предела. Точный смысл высказанных сейчас интуитивных соображений дает утверждение теоремы 2.

Обратимся к уже рассмотренному выше примеру. Пусть $x_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$, и сегмент A не является мультипликативным. При произвольном $k \in \underline{p}(A)$ будет $k^2 \in \underline{p}(A)$ (парафундаментальный сегмент замкнут относительно монотонных функций), и, при $n > k^2$, имеем $x_n > 1 - \frac{1}{k}$, откуда

$$\sup_{\underline{p}(A)} x_n = 1.$$

Но, взяв $k \in A$ любым из таких, что $k^2 \notin A$, видим, что $1-\frac{1}{k} \notin M_A(1)$ является верхней границей последовательности $x_n,\ n \in A$. Значит, последовательность «не успевает» подойти к 1 достаточно близко при $n \in A \setminus \underline{p}(A)$.

Отметим в конце, что теоремы 1 и 2 двойственными рассуждениями могут быть перенесены на случай убывающих последовательностей, при этом супремум следует заменить инфимумом. Дадим формулировки.

Теорема 5. *Пусть сегмент A аддитивен, $x_n, n \in A$ — невозрастающая A-ограниченная последовательность. Она имеет A-предел в том и только том случае, когда существует ее A-инфимум, причем предел и инфимум могут быть выбраны равными.*

Теорема 6. *Пусть сегмент A аддитивен и не является π-сегментом, $x_n = z + \frac{1}{g(n)}$ для некоторого $z \in \mathbf{BQ}(A)$ и возрастающей функции g. Эта последовательность имеет предел, если справедливо (5). Если же (5) нарушено, но выполнено (6), то предел отсутствует.*

Заключение. Мы пришли к выводу, что возможность отсутствия предела у монотонных ограниченных последовательностей возникает в случае, когда новый горизонт не является парафундаментальным, а последовательность растет (или убывает) недостаточно быстро. Тем не менее полученные результаты (лемма 1) позволяют надеяться, что каким бы горизонтом мы ни задались, всегда можно добиться сходимости изучаемой последовательности, лишь немного отдалив его.

Также было обосновано, что частичные суммы гармонического ряда всегда возрастают с такой скоростью, что обеспечивает его расходимость в любой нетривиальной гипердействительной структуре.

Библиографический список

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. — М., 2010. — Т. 1.

2. Larson, Ron, Bruce H. Edwards. Calculus, 10th ed. — Brooks Cole Cengage Learning. — 2014.

3. Бесов О.В. Лекции по математическому анализу. — М., 2014.

4. Briggs W.L., Cochran L. Calculus. — AddisonWesley, 2010.

5. Хренников А.Ю. Суперанализ. — М., 2014.

6. Stewart J. Calculus: Early Transcendentals. — Brooks Cole Cengage Learning, 2014.

7. Вопенка П. Альтернативная теория множеств. Новый взгляд на бесконечность. — Новосибирск, 2004.

8. Вопенка П. Математика в альтернативной теории множеств. — М., 1983.

9. Repicky M. A proof of the independence of the Axiom of Choice from the Boolean Prime Ideal Theorem // Comment. Math. Univ. Carolin. — 2015.

10. Дронов С.В. О свойстве фундаментальности сегментов класса натуральных чисел // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2009. — № 1/1.

11. Дронов С.В. О сегментах, сохраняющих предел последовательности // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2001. — № 1/1.

12. Козлов С.Д., Дронов С.В. О строении изотонного группоида на классе натуральных чисел в AST // Сиб. матем. журн. — 1994. — № 3.

13. Дронов С.В. К возможности движения π-горизонта в AST. // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2005. — № 1.

14. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. — М., 2016. — Т. 2.