

Влияние ширины канала на вязкоупругие колебания ледового покрова под действием движущейся нагрузки**К.А. Шшмарев*

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Channel Width Influence on a Hydroelastic Response of an Ice Cover Under a Moving Load*K.A. Shishmarev*

Altai State University (Barnaul, Russia)

Изучается влияние ширины канала на гидроупругие волны в канале, покрытом льдом, вызванные движением нагрузки вдоль ледового покрова. Внешняя нагрузка моделируется гладким локально распределенным давлением. За основу математической модели берутся дифференциальное уравнение колебаний вязкоупругой ледовой пластины и уравнение Лапласа для потенциала скорости течения жидкости под ледовым покровом. Данные уравнения замыкаются граничными условиями непротекания на стенках и дне канала, условиями жесткого защемления льда на стенках канала, кинематическим и динамическим условием на границе раздела лед — жидкость. Исследуется решение в виде бегущей волны, которое не зависит от времени в системе координат, движущейся вместе с внешней нагрузкой. С помощью преобразования Фурье по переменной, направленной вдоль канала, рассматриваемая задача сводится к двумерной задаче относительно профиля волны поперек канала, которая решается методом разложения профиля волны на нормальные моды колебаний закрепленной балки. Задача о колебаниях бесконечного ледового покрова решается с помощью двойного преобразования Фурье. Проведен анализ численных результатов при увеличении ширины канала, а также сравнение полученного решения с решением для бесконечной пластины.

Ключевые слова: ледовый покров, гидроупругие волны, движущаяся нагрузка, канал.

DOI 10.14258/izvasu(2016)1-35

Введение. Целью данного исследования является изучение возможности разрушения льда движущимся судном [1]. Для разрушения льда могут использоваться судна на воздушной подуш-

In this paper, the channel width influence on hydroelastic waves in an ice-covered channel is investigated. Waves are generated by a load moving along the ice sheet. External load is modeled by a localized smooth pressure distribution. The differential equation of oscillations of viscoelastic ice plate and the Laplace equation for the velocity potential of fluid flow under the ice cover are used as a mathematical model. These equations are supplemented with impermeability boundary conditions on channel walls and bottom, clamped conditions for ice on the channel walls, and the kinematic and the dynamic condition on the ice — liquid interface. The time-independent travelling wave solution in a coordinate system moving with the external load is studied. Applying the Fourier transformation allows the initial problem to be reduced to the two-dimensional problem of wave profile across the channel, which is solved by the normal mode method for a fixed beam. The problem of deflections in the infinite ice sheet is solved by double Fourier transformation. Numerical results of the channel width influence are discussed. The ice deflection and strains in the ice sheet are calculated and compared with the results of problem solution for infinite ice plate.

Key words: ice sheet, hydroelastic waves, moving load, channel.

ке, которые движутся вдоль замороженной части реки на определенной скорости и создают напряженно-деформированное состояние ледового покрова. Вызванные напряжения могут быть достаточными для ломки льда [2–4].

Проблемы о колебаниях ледового покрова хорошо изучены в прошлом для прогрессивных

*Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства № 2014/2 и гранта РФФИ № 13-08-01097.

волн в канале (см., например, [5–7]), для бесконечной ледовой пластины [8, 9] и для полубесконечного ледового покрова [10], когда лед крепится к одной вертикальной стенке. Нагрузка двигалась с постоянной скоростью вдоль ледового покрова и моделировалась точкой давления или локализованным гладким распределением внешнего давления [11]. Проблемы исследовались в рамках линейной теории гидроупругих волн [12, 13]. Жидкость предполагается идеальной и несжимаемой [14]. Движение жидкости является потенциальным и вызвано отклонением ледового покрова от состояния покоя. Исследовались задачи с закрепленным и незакрепленным ледовым покровом [15]. Исследуется ледовый покров постоянной толщины. В данной работе рассматриваемая задача исследуется с учетом гладкой локализованной нагрузки, движущейся между двумя вертикальными стенками по ледовому покрову, прикрепленному к стенкам. Основное внимание в статье уделено прогибам ледового покрова и изгибающим напряжениям, в частности, на стенках канала. Прогибы льда и изгибающие напряжения изучаются при заданных физических характеристиках ледового покрова. Практический интерес исследования заключается в ответе на вопрос — может ли движущаяся нагрузка сломать лед, в частности, вблизи стенок канала.

В первой части статьи были исследованы прогибы и удлинения в ледовом покрове канала при заданных физических параметрах ледового покрова, форме и скорости нагрузки [1]. В данной работе основной упор делается на исследование динамики прогибов и удлинений в ледовом покрове, а также изменение критической скорости в зависимости от ширины канала.

1. Постановка задачи о колебаниях бесконечной незакрепленной ледовой пластины. Рассматривается прогиб бесконечного незакрепленного ледового покрова, вызванный движением внешней нагрузки по ледовому покрову. По переменным x и y ледовый покров считается бесконечным ($-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$). Канал наполнен идеальной жидкостью с плотностью ρ и глубиной H ($-H < z < 0$, x, y, z — декартовы координаты). Жидкость покрыта ледовым покровом постоянной толщины h_i с изгибной жесткостью $D = Eh_i^3/[12(1 - \nu^2)]$, где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона для льда. Ледовый покров канала моделируется как тонкая вязкоупругая ледовая пластина. Внешняя нагрузка моделируется как пятно давления, движущееся по пластине в положительном направлении оси x с постоянной скоростью U . В результате нагрузки лед отклоняется от исходного состояния ($z = 0$) на величину $w^\infty(x, y, t)$.

Внешняя нагрузка моделируется гладкой локализованной функцией

$$P(x, y, t) = -P_0 P_1 \left(\frac{x - Ut}{H} \right) P_2 \left(\frac{y}{H} \right) \quad (-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty), \quad (1)$$

$$P_1 \left(\frac{x - Ut}{H} \right) = \frac{\cos(\pi c \left(\frac{x - Ut}{H} \right)) + 1}{2}, \quad \left| \frac{x - Ut}{H} \right| < 1/c,$$

$$P_1 = 0, \quad \left| \frac{x - Ut}{H} \right| \geq 1/c,$$

$$P_2 \left(\frac{y}{H} \right) = \frac{\cos \left(\frac{\pi k y}{H} \right) + 1}{2}, \quad \left| \frac{y}{H} \right| < 1/k,$$

$$P_2 = 0, \quad \left| \frac{y}{H} \right| \geq 1/k,$$

где c и k — параметры нагрузки, характеризующие размер пятна давления.

Исследуемая задача рассматривается в подвижной системе координат $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, оси которой параллельны осям исходной системы (x, y, z) , а центр новой системы находится в центре приложенного внешнего пятна давления и движется вдоль оси x со скоростью U . В безразмерных переменных основные уравнения математической модели примут вид (масштаб длины — H , масштаб времени — L/U , масштаб прогибов — $P_0/(\rho g)$, масштаб потенциала скорости — $UP_0/(\rho g)$, здесь и далее знак \sim опускается)

$$\alpha \cdot \text{Fr}^2 w_{xx}^\infty + \beta \left(1 - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^4 w^\infty + w^\infty = \text{Fr}^2 \varphi_x - P_1(x) P_2(y) \quad (-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, z = 0), \quad (2)$$

$$\Delta \varphi = 0 \quad (-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, -1 < z < 0), \quad (3)$$

$$\varphi_z = -w_x^\infty \quad (z = 0), \quad \varphi_z = 0 \quad (z = -1), \quad (4)$$

$$w^\infty, \varphi \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty), \quad (5)$$

где $\beta = D/(\rho g H^4)$, $\varepsilon = (\tau U)/H$, $\alpha = M/(\rho H) = (\rho_i h_i)/(\rho H)$ — массовый параметр, $\text{Fr} = U/\sqrt{gH}$ — число Фруда.

Полученная задача (2)–(5) зависит от 4 безразмерных параметров, вычисляемых по заданным характеристикам ледового покрова. Требуется сравнить вычисленные прогибы $w^\infty(x, y)$ с прогибами в канале при большой ширине канала и малом радиусе пятна давления [16].

2. Схема решения. Рассмотрим преобразование Фурье в направлении x и y

$$w^X(\xi, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w^\infty(x, y) e^{-i\xi x} dx,$$

$$w^\infty(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w^X(\xi, y) e^{i\xi x} d\xi. \quad (6)$$

$$w^Y(\xi, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w^\infty(x, y) e^{-i\eta y} dy,$$

$$w^\infty(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w^Y(\eta, y) e^{i\eta y} d\eta. \quad (7)$$

Применяя последовательно данные преобразования к уравнению пластины (2), получим

$$(1 - \alpha \text{Fr}^2 \xi^2) w^{XY} + \beta(1 - i\xi\varepsilon)(\eta^4 w^{XY} + 2\xi^2 \eta^2 w^{XY} + \xi^4 w^{XY}) = \xi^2 \text{Fr}^2 \phi - P^{XY}(\xi, \eta), \quad (8)$$

где

$$P^{XY}(\xi, y) = P_1^X(\xi) P_2^Y(\eta),$$

$$P_1^X(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(\xi/c)}{\xi} - \frac{\xi \sin(\xi/c)}{\xi^2 - (\pi c)^2} \right), \quad \xi \neq 0,$$

$$P_1^X(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{c}, \quad \xi = 0.$$

$$P_2^Y(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(\eta/k)}{\eta} - \frac{\eta \sin(\eta/k)}{\eta^2 - (\pi k)^2} \right), \quad \eta \neq 0,$$

$$P_2^Y(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k}, \quad \eta = 0.$$

Функция ϕ является решением следующей задачи:

$$\phi_{zz} = (\xi^2 + \eta^2)\phi \quad (-1 < z < 0), \quad (9)$$

$$\phi_z = w^{XY}(\xi, \eta) \quad (z = 0), \quad \phi_z = 0 \quad (z = -1).$$

Решение задачи (9) будем искать в виде

$$\phi = C(\xi, \eta) \cosh[\lambda(z + 1)], \quad \lambda(\xi, \eta) = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Параметр $C(\xi, \eta)$ определим из граничного условия для ϕ при $z = 0$

$$C\lambda \sinh(\lambda) = w^{XY}, \quad C = \frac{w^{XY}}{\lambda \sinh(\lambda)},$$

откуда получим

$$\phi = \frac{w^{XY} \cosh(\lambda(1 + z))}{\lambda \sinh(\lambda)}. \quad (10)$$

С учетом (10) уравнение (8) представим в виде

$$\left(1 - \alpha \text{Fr}^2 \xi^2 - \frac{\xi^2 \text{Fr}^2 \coth(\lambda)}{\lambda}\right) w^{XY} + \beta(1 - i\xi\varepsilon)(\eta^4 w^{XY} + 2\xi^2 \eta^2 w^{XY} + \xi^4 w^{XY}) = -P^{XY}(\xi, \eta).$$

Выразим из последнего уравнения w^{XY}

$$w^{XY} = \frac{-P^{XY}}{q^R + iq^I},$$

где

$$q^R = \left(1 - \alpha \text{Fr}^2 \xi^2 - \frac{\xi^2 \text{Fr}^2 \coth(\lambda)}{\lambda}\right) + \beta(\eta^4 + 2\xi^2 \eta^2 + \xi^4),$$

$$q^I = -\xi\varepsilon(\eta^4 + 2\xi^2 \eta^2 + \xi^4).$$

Для вычисления $w^\infty(x, y)$ применим обратные преобразования Фурье (6) и (7) для функции w^{XY} :

$$w^\infty(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} w^{XY} e^{i\eta y} d\eta \right) e^{i\xi x} d\xi. \quad (11)$$

Выделим в w^{XY} вещественную и мнимую части:

$$w^{XY} = Q^R + iQ^I, \quad (12)$$

где

$$Q^R = \frac{-P^{XY} q^R}{(q^R)^2 + (q^I)^2}, \quad Q^I = \frac{P^{XY} q^I}{(q^R)^2 + (q^I)^2}.$$

С учетом (12), уравнение (11) запишем в виде

$$w^\infty(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (Q^R + iQ^I)(\cos(\eta y) + i \sin(\eta y)) d\eta \right) e^{i\xi x} d\xi. \quad (13)$$

Функции Q^R и Q^I являются четными по η . Следовательно, интеграл по η в (13) сведется к двум интегралам от 0 до ∞ :

$$w^\infty(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} (Q^R + iQ^I) \cos(\eta y) d\eta \right) \cdot (\cos(\xi x) + i \sin(\xi x)) d\xi. \quad (14)$$

Интеграл $\int_0^{\infty} Q^R \cos(\eta y) d\eta$ является четным по ξ ,

а интеграл $\int_0^{\infty} Q^I \cos(\eta y) d\eta$ — нечетным, откуда

следует, что интеграл (14) может быть представлен в виде

$$w^\infty(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty Q^R \cos(\eta y) d\eta \right) \cos(\xi x) d\xi - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty Q^I \cos(\eta y) d\eta \right) \sin(\xi x) d\xi. \quad (15)$$

Интегралы в (15) вычислялись по аналогичному алгоритму для задачи о колебаниях ледового покрова в канале, изложенному в первой части статьи.

3. Численные результаты. Исследуемая задача о гидроупругих волнах в канале решалась численно при следующих параметрах ледового покрова: плотность льда $\rho_i = 917 \text{ кг/м}^3$, модуль Юнга $E = 4.2 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$ и время релаксации льда $\tau = 0.1 \text{ с}$. Толщина ледового покрова принималась равной 10 см, глубина канала — 2 м. Нагрузка (1) действовала на область $2 \times 2 \text{ м}$ и двигалась вдоль центральной линии канала с постоянной скоростью U . Численный анализ имеет цель исследовать прогибы и удлинения в ледовом покрове канала и сравнить полученные численные результаты при увеличении ширины канала с соответствующими распределениями в задаче с безграничным незакрепленным ледовым покровом.

Прогибы и удлинения в ледовом покрове с учетом влияния стенок канала шириной $2L$ для докритической скорости нагрузки $U = 3 \text{ м/с}$ изображены на рисунках 1–3, для посткритической скорости $U = 7 \text{ м/с}$ — на рисунках 4–6. Результаты вычислений представлены в размерных переменных для $P_0 = 1 \text{ кПа}$.

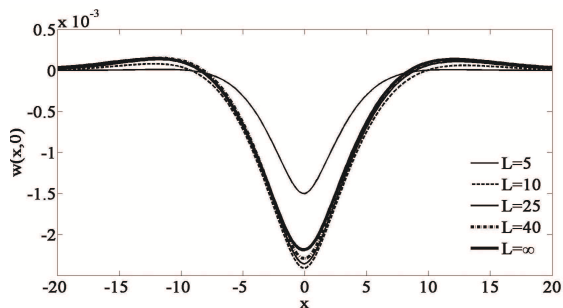


Рис. 1. Профили прогибов w^∞ вдоль центральной линии канала для $U = 3 \text{ м/с}$

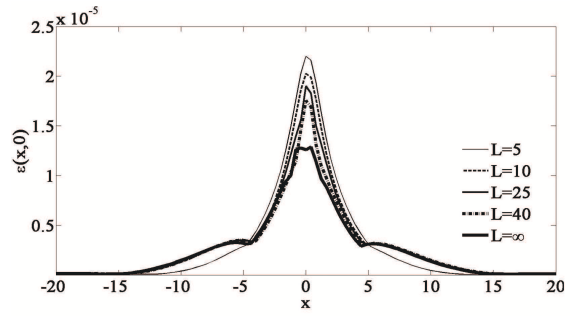


Рис. 2. Профили удлинений ϵ вдоль центральной линии канала для $U = 3 \text{ м/с}$

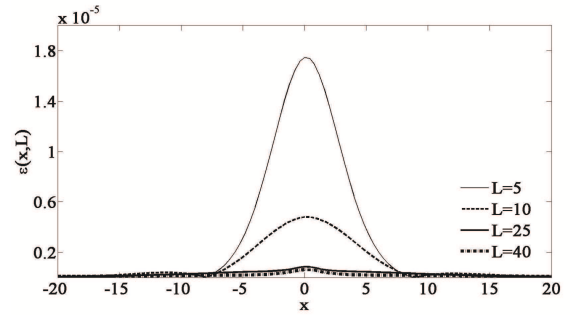


Рис. 3. Профили удлинений ϵ на стенках канала для $U = 3 \text{ м/с}$

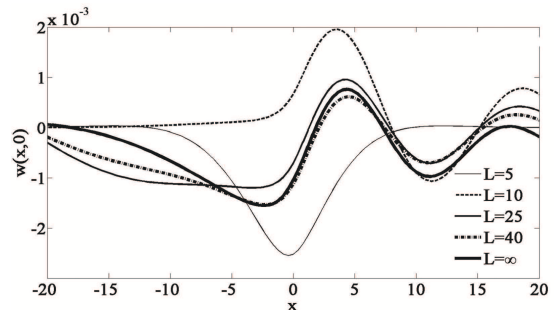


Рис. 4. Профили прогибов w^∞ вдоль центральной линии канала для $U = 7 \text{ м/с}$

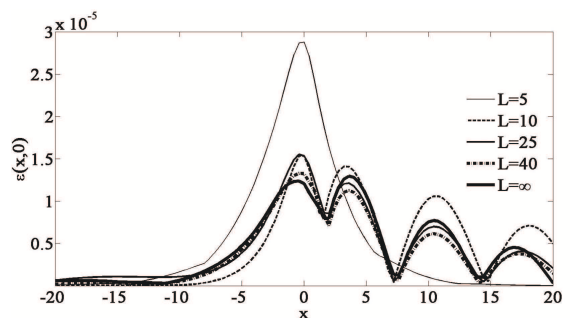


Рис. 5. Профили удлинений ϵ вдоль центральной линии канала для $U = 7 \text{ м/с}$

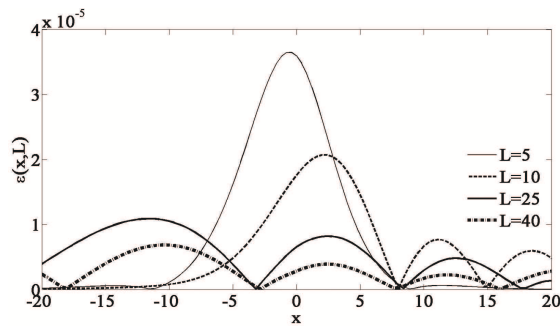


Рис. 6. Профили удлинений ϵ на стенках канала для $U = 7$ м/с

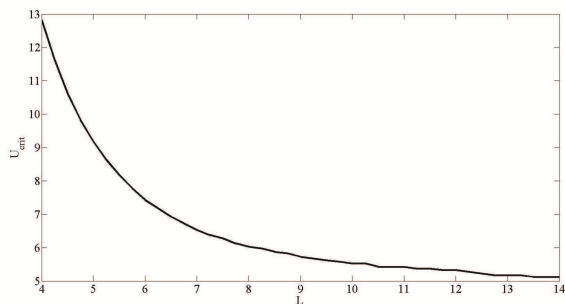


Рис. 7. Зависимость критической скорости для первой моды в зависимости от ширины канала.

Для докритической скорости $U = 3$ м/с амплитуда прогибов увеличивается, напряжения вдоль центральной линии и на стенках уменьшаются

в соответствии с увеличением ширины канала. Для посткритической скорости $U = 7$ м/с амплитуда прогибов уменьшается в окрестности нагрузки, напряжения вдоль центральной линии и на стенках уменьшаются при увеличении ширины канала. Для небольшой ширины канала напряжения на стенках больше, чем напряжения вдоль центральной линии.

Следует отметить, что критические скорости гидроупругих волн зависят от ширины канала, которые увеличиваются с уменьшением ширины (рис. 7). Численные результаты показали, что и прогибы, и удлинения с увеличением ширины канала приближаются к соответствующим распределениям для бесконечной пластины.

Закключение. Численно решена задача о гидроупругих волнах в бесконечном незакрепленном ледовом покрове, вызванных движением внешней нагрузки. Максимальная амплитуда колебаний наблюдается при скоростях нагрузки, близких к критической скорости первой моды гидроупругой волны [5]. Колебания ледового покрова сосредоточены в области нагрузки для докритической скорости, в области нагрузки и перед нагрузкой для посткритической скорости ($U = 7$). При увеличении дистанции между стенками прогибы и удлинения в ледовом покрове приближаются к соответствующим распределениям для бесконечного покрова.

Автор выражает благодарность А.А. Коробкину, Т.И. Хабахпашевой и А.А. Папину за постановку задачи и обсуждение результатов.

Библиографический список

1. Шишмарев К.А. Постановка задачи о вязкоупругих колебаниях ледовой пластины в канале в результате движения нагрузки // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2015. — № 1/2 (85).
2. Zhestkaya V.D. Numerical Solution of the Problem of an Ice Sheet Under a Moving Load // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 1999. — V. 40 (4).
3. Жесткая В.Д., Козин В.М. Численное решение задачи о воздействии ударного импульса на ледяной покров // ПМТФ. — 2008. — Т. 49, № 2.
4. Kozin V.M. Resonance Method of Breaking of Ice Cover. Inventions and Experiments. — Moscow, 2007.
5. Korobkin A., Khabakhpasheva T., Papin A. Waves Propagating Along a Channel with Ice Cover // European Journal of Mechanics B/Fluids. — 2014. — V. 47.
6. Шишмарев К.А. Математические вопросы моделирования взаимодействия ледового покрова и гидроупругих волн // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2015. — № 1/2 (85).
7. Папин А.А., Токарева М.А., Шишмарев К.А. Математические вопросы динамики ледового покрова // Вестник алтайской науки. — 2015. — № 1 (23).
8. Squire V., Hosking R., Kerr A., Langhorne P. Moving loads on ice. — 1996.
9. Brocklehurst P. Hydroelastic waves and their interaction with fixed structures. — PhD thesis, University of East Anglia, UK, 2012.
10. Brocklehurst P., Korobkin A.A., Părău E.I. Interaction of Hydro-Elastic Waves with a Vertical Wall // Journal Engineering Mathematic. — 2010, № 68.
11. Kozin VM, Zhestkaya VD, Pogorelova AV, Chizhumov SD, Dzhabailov MP, Morozov VS,

Kustov AN. Applied Problems of the Dynamics of Ice Cover. — Moscow, 2008.

12. Коробкин А.А., Хабахпашева Т.И., Папин А.А. Математические модели снежно-ледового покрова. — Барнаул, 2013.

13. Hydroelasticity in Marine Technology / Edited by S. Malenica, N. Vladimir and I. Senjanovic. VIDICI d.o.o. 2015.

14. Kashiwagi M, Ohkusu M. A New Theory for Side-Wall Interference Effects on Forward-Speed

Radiation and Diffraction Forces // Ship Technology Research (Schiffstechnik). — 1991. — V. 38.

15. Batyaev EA, Khabakhpasheva TI. Hydroelastic Waves in Channel with Free Ice Cover // Fluid Dynamics. — 2015. — № 6.

16. Шишмарев К.А., Хабахпашева Т.И., Коровкин А.А. Влияние гидростатического и гидродинамического давлений на колебания ледового покрова // МАК-2015. — 2015.