

**Численное решение одномерной задачи фильтрации с учетом суффозионных процессов\****А.Н. Сибин, Н.Н. Сибин*

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

**Numerical Solution of One-Dimensional Problem of Filtration with Suffusion Processes***A.N. Sibin, N.N. Sibin*

Altai State University (Barnaul, Russia)

Рассматривается математическая модель изотермической внутренней эрозии без учета деформации пористой среды. При достижении определенной величины скорости фильтрации происходит вынос частиц грунта из области течения. В качестве математической модели используются уравнения сохранения массы для воды, подвижных твердых частиц и неподвижного пористого скелета, а также закон Дарси для воды и подвижных твердых частиц и соотношение для интенсивности суффозионного потока. Дается постановка задачи и проводится преобразование системы уравнений. В результате преобразований для насыщенности водной фазы возникает вырождающееся на решении параболическое уравнение, для давления – эллиптическое уравнение и для пористости грунта – уравнение первого порядка. Имеется аналогия с классической моделью Маскета-Леверетта. Предложен алгоритм численного решения одномерной начально-краевой задачи внутренней эрозии грунта. Представлены результаты численного решения задачи. Найдены скорости движения и давление грунтовых вод, пористость и концентрация подвижных частиц грунта. Кроме того, приведен краткий обзор моделей внутренней суффозии.

**Ключевые слова:** многофазная фильтрация, пористая среда, суффозия, фазовый переход, насыщенность.

DOI 10.14258/izvasu(2017)1-24

**Постановка задачи.** Рассматриваются процессы фильтрации подземных вод и внутренней суффозии. Грунт моделируется как трехфазная сплошная пористая среда. Поры полностью заполнены смесью воды ( $i = 1$ ) и подвижных твердых частиц ( $i = 2$ ). Доля пор в грунте ( $i = 3$ ) определяется пористостью  $\phi = (V_1 + V_2)/V$ , где  $V =$

In this paper, a mathematical model of isothermal internal erosion without deformation of a porous medium is studied. Removal of soil particles from a flow occurs at a certain value of filtration velocity. Mass conservation equation for water, moving solids and stationary porous skeleton along with Darcy's law for water and moving solid particles, and an equation for the suffusion intensity are utilized for a mathematical model of the problem. Problem formulation and development of the equation system are shown in section 1. There are the degenerate parabolic equation for water phase saturation, the elliptical equation for pressure, and the first order equation for porosity. The analogy with the classical Musket-Leverette model is also revealed. The numerical solution algorithm for a one-dimensional initial boundary value problem for internal soil erosion is proposed in section 2, and numerical solution results for the problem are presented in section 3. Values of speed and pressure of ground water, porosity and density of moving soil particles are obtained. Also, a brief overview of internal suffusion models is provided.

**Key words:** multiphase flow, porous medium, suffusion, phase transition, saturation.

$V_1 + V_2 + V_3$  – общий объем грунта,  $V_1, V_2, V_3$  – соответственно, объемы воды, подвижных твердых частиц и скелета грунта. В одномерном случае система уравнений, описывающая процесс внутренней эрозии, имеет вид

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial s}{\partial x} + bv + F \right) - s \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (1)$$

\*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial p}{\partial x} + f \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{I}{\rho_3^0}. \quad (2)$$

где  $I$  – интенсивность фазового перехода (суффозионный поток);  $s = V_1/(V_1 + V_2)$ ,  $s_2 = V_2/(V_1 + V_2)$  – концентрации воды (насыщенность) и подвижных твердых частиц в порах;  $\rho_1^0, \rho_2^0, \rho_3^0$  – истинные плотности воды, подвижных твердых частиц грунта и скелета грунта. В рассматриваемом случае  $\rho_3^0 = \rho_2^0$ , так как подвижные частицы захватываются суффозионным потоком из грунта.

$$F = \frac{k_{01} k_{02} K_0 g}{k} (\rho_1^0 - \rho_2^0), \quad b(s) = \frac{k_{02}}{k}.$$

$$a(s, \phi) = -K_0 \frac{k_{01} k_{02}}{k} \frac{\partial p_c}{\partial s},$$

$$k(s) = k_{01} + k_{02},$$

$$K = K_0(\phi) k(s),$$

$$p = p_2 + \int_s^1 \frac{k_{01}(\xi)}{k(\xi)} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi.$$

где  $p$  – так называемое «приведенное» давление [1].

Уравнения сохранения импульса для воды и подвижных твердых частиц грунта берем в виде [1–3]

$$\vec{v}_i = -K_0(\phi) \frac{\bar{k}_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2.$$

Здесь  $K_0(\phi)$  – симметрический тензор фильтрации пористой среды;  $\bar{k}_{0i}$  – относительные фазовые проницаемости ( $k_{0i} = k_{0i}(s_i) \geq 0$ ,  $k_{0i}|_{s_i=0} = 0$ ,  $0 \leq s_i \leq 1$ );  $\mu_i$  – коэффициенты динамической вязкости;  $\vec{g}$  – ускорение силы тяжести;  $p_1, p_2$  – соответственно, давления первой и второй фаз.

Интенсивность фазового перехода задается функцией [4, 5]

$$I = \begin{cases} \lambda \rho_3^0 (1 - \phi) (1 - s) \phi (|\vec{v}_1| - |\vec{v}_k|), & |\vec{v}_1| \geq |\vec{v}_k|; \\ 0, & |\vec{v}_1| < |\vec{v}_k|. \end{cases}$$

Начальные и граничные условия задачи имеют вид

$$s(x, 0) = s_1, \quad \frac{\partial s}{\partial x}(0, t) = s_0, \quad s(H, t) = s_h,$$

$$\phi(x, 0) = \phi_0, \quad p(0, t) = p_0, \quad p(H, t) = p_h,$$

$$x \in [0, H].$$

Частный случай данной модели при  $p_1 = p_2$  рассматривается в работах [5–8]. Похожие модели исследовались в [9–13].

**Результаты численных расчетов.** Экспериментальное исследование суффозионной устойчивости грунтов проводилось в [14]. В работе [15] предложен алгоритм численного решения системы уравнений (1), (2) при заданной суммарной скорости фильтрации и проведены тестовые расчеты. В данной работе найденное давление  $p$  позволяет определить суммарную скорость фильтрации  $v$ . Исследованию зависимости искомых функций начально-краевой задачи от параметра  $\lambda$ , который отвечает за суффозионную устойчивость, посвящены работы [5, 16, 17]. Однако в этих работах не исследовалась корректность предложенной математической модели. Используемые численные алгоритмы имели первый порядок аппроксимации как по пространственной переменной, так и по времени. В этом пункте представлены результаты численных расчетов начально-краевой задачи, для которой доказано существование и единственность классического решения в работе [18, 19] для  $v > v_k$ .

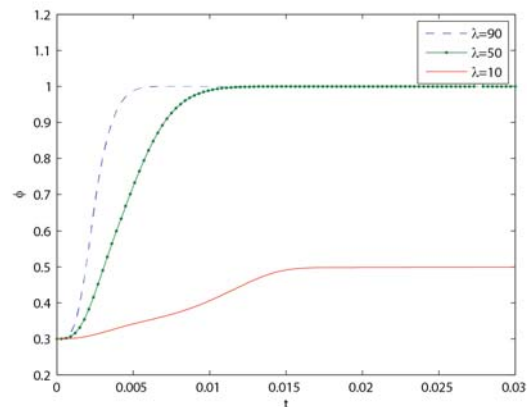


Рис. 1. Изменение пористости грунта

В численных расчетах использовался следующий набор модельных параметров [20]:

$$\rho_1^0 = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_2^0 = 1440 \text{ кг/м}^3,$$

$$B = 0.00001 \text{ м}^2, \quad g = 9.8 \text{ м/с}^2, \quad v_k = 0,$$

$$\mu_1 = 0.001787 \text{ кг/мс}, \quad \mu_2 = 0.003574 \text{ кг/мс}.$$

На рисунках 1 и 2 представлены графики изменения пористости грунта и концентрации для грунтов, имеющих различную суффозионную устойчивость. Процесс суффозии прекращается, если концентрация подвижных частиц грунта равна нулю или пористость равна единице (см. рис. 1, 2). Зная распределение пористости

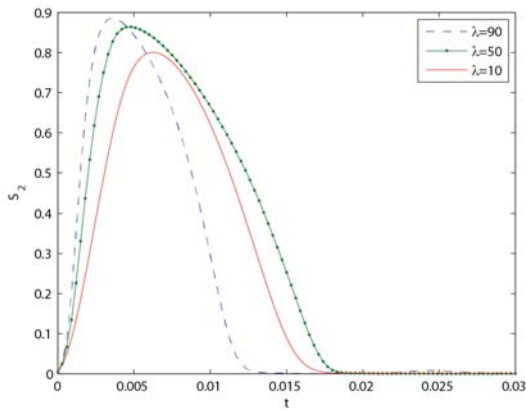


Рис. 2. Изменение концентрации подвижных частиц грунта в фильтрационном потоке

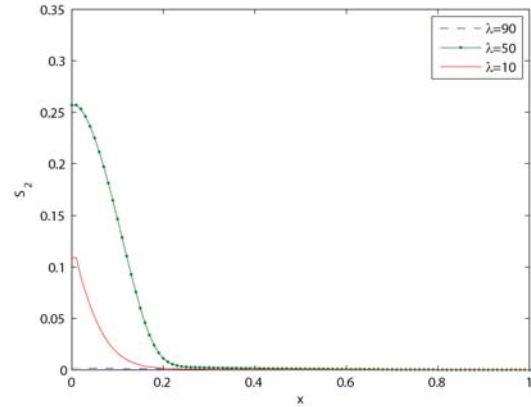


Рис. 4. Концентрация подвижных частиц грунта в фильтрационном потоке при  $t = 0.015$

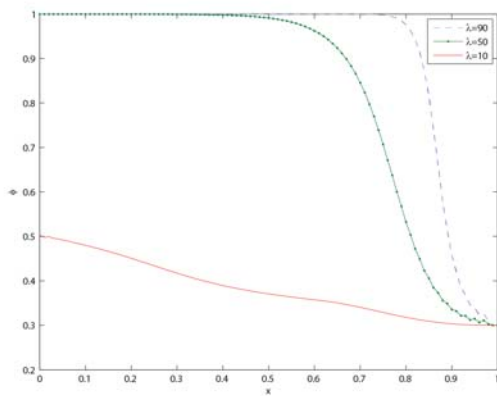


Рис. 3. Пористость грунта при  $t = 0.0297$

(см. рис. 3), можно оценить размер образовавшейся полости. На рисунках 4 и 5 представлены распределения концентрации и давления при  $t = 0.015$  и  $t = 0.012$  соответственно.

**Закключение.** В работе дан краткий литературный обзор моделей внутренней эрозии почвы. Предложен алгоритм численного решения начально-краевой задачи фильтрации грунтовых вод с учетом внутренней эрозии грунта и проведены тестовые численные расчеты. Найдены скорости движения и давление грунтовых вод, пористость и концентрация подвижных частиц грунта для грунтов, имеющих различную суффозионную устойчивость.

Авторы статьи признательны А.А. Папину за обсуждение задачи и конструктивные замечания.

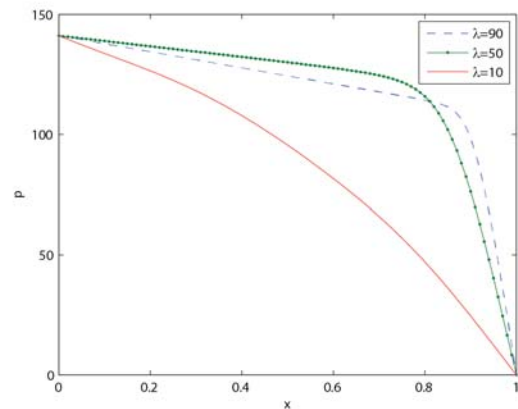


Рис. 5. Приведенное давление при  $t = 0.012$

## Библиографический список

1. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск, 1983.
2. Gard S.K., Pritchett J.W. Dynamics of gas - fluidized beds. *Journal of Applied Physics // Journal of Applied Physics*. – 1975. – Vol. 46, № 10.
3. Хабиров В.В., Хабиров С.В. Разработка газогидратов современными технологиями // Труды Института механики УНЦ РАН. – 2010.
4. Wang J., Walters D. A., Settari A., Wan R. G. Simulation of cold heavy oil production using an integrated modular approach with emphasis on foamy oil flow and sand production effects // 1st Heavy Oil Conference. – 2006.
5. Vardoulakis I., Stavropoulou M., Papanastasiou R. Hydro-Mechanical Aspects of the Sand Production Problem // *Transport in Porous Media*. – 1996. – 22.
6. Сибин А.Н. Математическая модель деформации мерзлого грунта вблизи термокарстовых озер // Сборник трудов Всеросс. молодежной школы-семинара «Анализ, геометрия и топология». – Барнаул, 2013.
7. Папин А.А., Сибин А.Н., Хворых Д.П. Об одной задаче фильтрации в условиях вечной мерзлоты // Сборник трудов 16 регион. конф. по математике «МАК-2013». – Барнаул, 2013.
8. Папин А.А., Сибин А.Н. Автомодельное решение задачи поршневого вытеснения жидкостей в пороупругой среде // *Известия Алтайского гос. ун-та*. 2016. № 1 (89). DOI:10.14258/izvasu(2016)1-27
9. Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A. The response of ice cover to a load moving along a frozen channel // *Applied Ocean Research*. – 2016. – № 59.
10. Шишмарев К.А. Постановка задачи о вязкоупругих колебаниях ледовой пластины в канале в результате движения нагрузки // *Известия Алтайского гос. ун-та*, – 2015. – Вып. 1/2 (85). DOI:10.14258/izvasu(2015)1.2-35
11. Токарева М.А. Двумерная задача фильтрации в тонком пороупругом слое // *Известия Алтайского гос. ун-та*. – 2013. – № 1-1 (77).
12. Tokareva M.A. Localization of solutions of the equations of filtration in poroelastic medium // *Журнал Сибирского федерального ун-та. Серия: Математика и физика*. – 2015. – Т. 8. – № 4.
13. Ахмерова И.Г., Папин А.А., Токарева М.А. Математические модели механики неоднородных сред. – Барнаул. – 2012. – Ч. I.
14. Рекомендации по методике лабораторных испытаний грунтов на водопроницаемость и суффозионную устойчивость. – Ленинград, 1983.
15. Papin A. A., Sibin A. N. Model isothermal internal erosion of soil // *J. Phys.: Conf. Ser.* – 2016. – Vol. 722(1).
16. Bonelli S. *Erosion of Geomaterials*. – UK, 2012.
17. Chetti A., Benamar A., Hazzab A. Modeling of Particle Migration in Porous Media: Application to Soil Suffusion // *Transport in Porous Media*. – 2016. – Vol. 113(3).
18. Папин А.А., Сибин А.Н. О разрешимости первой краевой задачи для одномерных уравнений внутренней эрозии // *Известия Алтайского гос. ун-та*. – 2015. – Вып. 1/2 (85). DOI:10.14258/izvasu(2015)1.2-25
19. Ахмерова И.Г. Разрешимость краевой задачи для уравнений одномерного движения двухфазной смеси // *Журнал Сибирского федерального ун-та. Серия: Математика и физика*. – 2012. – Т. 5, № 1.
20. Снарев А.И. Расчеты машин и оборудования для добычи нефти и газа. – М., 2010.