УДК 514.76

Применение пакетов символьных вычислений к исследованию оператора одномерной кривизны на нередуктивных однородных псевдоримановых многообразиях*

О.П. Хромова

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Application of Symbolic Computation Packages to Investigation of One-Dimensional Curvature Operator on Non-Reductive Homogeneous Pseudo-Riemannian Manifolds

O.P. Khromova

Altai State University (Barnaul, Russia)

Изучение свойств операторов кривизны, в частности оператора одномерной кривизны, представляет интерес в понимании геометрического и топологического строения однородного (псевдо)риманова многообразия. В общем случае эта задача достаточно сложна. Поэтому приходится накладывать ограничения на класс рассматриваемых многообразий или их размерность. Если размерность многообразия конечна, то представляется возможным применение систем аналитических вычислений. Разработаны математические и компьютерные модели для определения компонент оператора одномерной кривизны и его спектра (множества собственных значений) нередуктивных однородных (псевдо)римановых многообразий конечной размерности. С помощью реализации этого алгоритма в среде пакета Maple исследован спектр оператора одномерной кривизны нередуктивных однородных лоренцевых многообразий размерности 4. Кроме того, определен симметрический оператор, матрица которого соответствует матрице тензора одномерной кривизны, и изучен вопрос о возможных сигнатурах данного оператора на четырехмерных нередуктивных однородных лоренцевых многообразиях.

Ключевые слова: пакеты символьных вычислений, нередуктивные однородные многообразия, оператор одномерной кривизны.

The study of curvature operator properties, in particular, the one-dimensional curvature operator, is interesting for the understanding of the geometrical and topological structure of a homogeneous (pseudo)Riemannian manifold. In general case, this problem is quite difficult. Therefore, it is necessary to impose restrictions either on the class of manifolds or their dimension. An application of analytical calculation systems is possible if the dimension is finite. In this paper, mathematical and computer models for determining the components of the one-dimensional curvature operator and its spectrum (the set of eigenvalues) of non-reductive homogeneous (pseudo)Riemannian manifolds of a finite dimension are developed. The investigation of one-dimensional curvature operator spectrum on non-reductive homogeneous Lorentzian manifolds of dimension 4 is performed by implementing this algorithm in Maple software. Also, a symmetric operator with a matrix corresponding to a matrix of the one-dimensional curvature tensor is defined, and the problem of this operator possible signature existence on four-dimensional non-reductive homogeneous Lorentzian manifolds is studied.

Key words: symbolic computation packages, non-reductive homogeneous pseudo-Riemannian manifolds, one-dimensional curvature operators.

DOI 10.14258/izvasu(2017)1-28

Обозначения и факты. Пусть $(M = G/H, g)$ — нередуктивное однородное псевдориманово многообразие размерности n. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли групп Ли G, через — $\mathfrak{h}$ подалгебру изотропии, а через $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ — векторное подпространство (необязательно инвариантное) дополнительное к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ однозначно определяет представление изотропии $\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ правилом $\rho(x)y = [x, y]_{\mathfrak{m}}$, $\forall x \in \mathfrak{h}$, $y \in \mathfrak{m}$. Инвариантной псевдоримановой метрике на M соответ-

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 16-01-00336А и № 16-31-00048мол_а).

ствует невырожденная билинейная форма g на $\mathfrak{m}$ такая, что $\rho(x)^t \circ g + g \circ \rho(x) = 0$, $\forall x \in \mathfrak{h}$. Эта форма однозначно определяет связность Леви-Чивита $\Lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ правилом (см. например, [1])

$$\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} = \frac{1}{2}[x,y]_{\mathfrak{m}} + v(x,y), \quad \forall x,y \in \mathfrak{g}, \qquad (1)$$

где отображение $v : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{m}$ определяется формулой $2g(v(x,y), z_{\mathfrak{m}}) = g(x_{\mathfrak{m}}, [z,y]_{\mathfrak{m}}) + g(y_{\mathfrak{m}}, [z,x]_{\mathfrak{m}})$, для всех $x,y,z \in \mathfrak{g}$.

Тензору кривизны связности Λ соответствует отображение $R : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ такое, что

$$R(x,y) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x,y]), \quad \forall x,y \in \mathfrak{m}. \quad (2)$$

Пусть $\{h_1, h_2, \ldots, h_p, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ — базис $\mathfrak{g}$, где $\{h_j\}$ и $\{u_i\}$ базисы $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно. Положим $[u_i,u_j]_{\mathfrak{m}} = d_{ij}^k u_k$, $[u_i,u_j]_{\mathfrak{h}} = D_{ij}^t h_t$, $[h_t,u_j]_{\mathfrak{m}} = \bar{d}_{tj}^k u_k$, $[h_t,u_j]_{\mathfrak{h}} = \bar{D}_{tj}^q h_q$, $v(u_i,u_j) = v_{ij}^k u_k$, $v(h_t,u_j) = \bar{v}_{tj}^k u_k$, $\Lambda(u_i)u_j = \Gamma_{ij}^k u_k$, $\Lambda(h_t)u_j = G_{tj}^k u_k$, $g(u_i,u_j) = g_{ij}$, где $i,j,k = 1,2,\ldots,n$; $t,q = 1,2,\ldots,p$.

Тогда из (1), очевидно, выполняется

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}d_{ij}^k + v_{ij}^k, \quad G_{tj}^k = \frac{1}{2}\bar{d}_{tj}^k + \bar{v}_{tj}^k, \qquad (3)$$

где $v_{ij}^k = v_{ijs}g^{sk}$, $v_{ijs} = \frac{1}{2}\left(d_{sj}^l g_{il} + d_{si}^l g_{jl}\right)$, $\bar{v}_{tj}^k = \bar{v}_{tjs}g^{sk}$, $\bar{v}_{tjs} = -\frac{1}{2}\bar{d}_{ts}^l g_{jl}$, $i,j,k,l,s = 1,2,\ldots,n$; $t = 1,2,\ldots,p$, и $\|g^{ks}\|$ есть матрица, обратная к $\|g_{ks}\|$.

Равенство (2) может быть записано в виде $R(u_i,u_j) = [\Lambda(u_i), \Lambda(u_j)] - \left(d_{ij}^k \Lambda(u_k) + D_{ij}^t \Lambda(h_t)\right)$, где $i,j,k = 1,2,\ldots,n$; $t = 1,2,\ldots,p$.

Тензор Риччи r и оператор кривизны Риччи Ric определяется, соответственно, так: $r_{ij} = r(u_i,u_j) = \sum_{s=1}^n R_{si}(u_s,u_j)$, $g(Ric(u_i),u_j) = r(u_i,u_j)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$.

Скалярная кривизна вычисляется по формуле $scal = r_{ij}g^{ij}$, $i,j = 1,2,\ldots,n$.

Тензор одномерной кривизны (или тензор Схоутена) A и оператор одномерной кривизны $\mathcal{A}$ определяются, соответственно, равенствами

$$\begin{aligned} A_{ij} = A(u_i,u_j) &= \frac{1}{n-2}\left(r_{ij} - \frac{scal \cdot g_{ij}}{2(n-1)}\right), \\ g(\mathcal{A}(u_i),u_j) &= A(u_i,u_j), \quad i,j = 1,2,\ldots,n. \end{aligned} \qquad (4)$$

Изучение свойств оператора $\mathcal{A}$ представляет интерес в понимании геометрического и топологического строения однородного (псевдо)риманова многообразия (см. подробнее [2, 3]). В римановом случае подобные исследования проводились Д.Н. Оскорбиным, Е.Д. Родионовым, В.В. Славским, О.П. Хромовой [2–4]. Некоторые результаты по исследованию оператора кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой получены П.Н. Клепиковым, С.В. Клепиковой, О.П. Хромовой [5, 6].

В отличие от случая римановой метрики, где всегда существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна, в лоренцевом случае могут возникнуть различные варианты, известные как *типы Сегре* и представляющие собой список размерностей жордановых блоков при записи оператора $\mathcal{A}$ в каноническом виде (см. подробнее [7]). Кроме того, для метрики лоренцевой сигнатуры оператор $\mathcal{A}$, вообще говоря, не является симметрическим и, как следствие, может иметь как действительные, так и комплексные собственные значения. Поэтому задача об исследовании сигнатур оператора одномерной кривизны может оказаться корректной лишь для симметрического оператора $\mathtt{A}$, матрица которого соответствует матрице тензора одномерной кривизны.

Теорема 1. [8]*Пусть $(M = G/H, g)$ — однородное лоренцево 4-мерное многообразие, и H связна. Если M нередуктивно, то пара алгебр Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ изоморфна одной паре из следующего списка.*

A1. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ есть алгебра $sl(2,\mathbb{R}) \oplus s(2)$ размерности пять (где $s(2)$ — двумерная разрешимая алгебра) с ненулевыми структурными уравнениями $[e_1,e_2] = 2e_2, [e_1,e_3] = -2e_3, [e_2,e_3] = e_1$, $[e_4,e_5] = e_4$. Алгебра изотропии $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\{e_3 + e_4\}$.*

A2. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ есть однопараметрическое семейство пятимерных разрешимых алгебр Ли $A_{5,30}$ с ненулевыми структурными уравнениями $[e_1,e_5] = (\alpha+1)e_1$, $[e_2,e_4] = e_1$, $[e_2,e_5] = \alpha e_2$, $[e_3,e_4] = e_2$, $[e_3,e_5] = (\alpha-1)e_3$, $[e_4,e_5] = e_4$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Алгебра изотропии $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\{e_4\}$.*

A3. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ есть одна из пятимерных разрешимых алгебр Ли $A_{5,37}$ или $A_{5,36}$ с ненулевыми структурными уравнениями $[e_1,e_4] = 2e_1$, $[e_2,e_3] = e_1$, $[e_2,e_4] = e_2$, $[e_2,e_5] = -\varepsilon e_3$, $[e_3,e_4] = e_3$, $[e_3,e_5] = e_2$, где $\varepsilon = 1$ для $A_{5,37}$ и $\varepsilon = -1$ для $A_{5,36}$. Алгебра изотропии $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\{e_3\}$.*

A4. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ есть алгебра $sl(2,\mathbb{R}) \ltimes n(3)$ размерности пять (где $n(3)$ — трехмерная алгебра Гейзенберга) с ненулевыми структурными уравнениями $[e_1,e_2] = 2e_2, [e_1,e_3] = -2e_3$, $[e_2,e_3] = e_1$, $[e_1,e_4] = e_4$, $[e_1,e_5] = -e_5$, $[e_2,e_5] = e_4$, $[e_3,e_4] = e_5$, $[e_4,e_5] = e_6$. Алгебра изотропии $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\{e_3 + e_6, e_5\}$.*

A5. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ есть алгебра $sl(2,\mathbb{R}) \ltimes A_{4,9}^1$ размерности семь с ненулевыми структурными уравнениями $[e_1,e_2] = 2e_2, [e_1,e_3] = -2e_3$, $[e_2,e_3] = e_1$, $[e_1,e_5] = -e_5$, $[e_1,e_6] = e_6$, $[e_2,e_5] = e_6$, $[e_3,e_6] = e_5$, $[e_4,e_7] = 2e_4$, $[e_5,e_6] = e_4$, $[e_5,e_7] = e_5$, $[e_6,e_7] = e_6$. Алгебра изотропии $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\{e_1 + e_7, e_3 - e_4, e_5\}$.*

Основные алгоритмы. В решении задачи об исследовании спектра оператора одномерной кривизны на нередуктивных однородных псевдоримановых многообразиях можно выделить следующие основные этапы: 1) вычисление компонент тензора одномерной кривизны A; 2) нахождение оператора одномерной кривизны $\mathcal{A}$; 3) определение собственных значений (спектра) оператора $\mathcal{A}$.

Таким образом, для нахождения оператора одномерной кривизны конечномерных нередуктивных однородных псевдоримановых многообразий необходимо реализовать следующую схему:

Задача: *найти компоненты оператора кривизны* $(R(u_i, u_j))$

↓

Математическая модель:
$$R(u_i,u_j) = [\Lambda(u_i),\Lambda(u_j)] - \left(d_{ij}^k\Lambda(u_k) + D_{ij}^t\Lambda(h_t)\right),$$
$$\Lambda(u_i) = \left(\Gamma_{ij}^k\right),\ \Lambda(h_t) = \left(G_{tj}^k\right),$$
$$\Gamma_{ij}^k = \tfrac{1}{2}d_{ij}^k + v_{ij}^k,\quad G_{tj}^k = \tfrac{1}{2}\bar{d}_{tj}^k + \bar{v}_{tj}^k,$$
$$v_{ij}^k = v_{ijs}g^{sk},\quad \bar{v}_{tj}^k = \bar{v}_{tjs}g^{sk},$$
$$v_{ijs} = \tfrac{1}{2}\left(d_{sj}^l g_{il} + d_{si}^l g_{jl}\right),\quad \bar{v}_{tjs} = -\tfrac{1}{2}\bar{d}_{ts}^l g_{jl},$$
где d_{ij}^k, D_{ij}^t, $\bar{d}_{tj}^k$ – структурные константы,
g_{ij} и g^{sk} – компоненты метрического и кометрического тензоров соответственно,
v_{ij}^k, $\bar{v}_{tj}^k$ – компоненты отображения v,
Γ_{ij}^k, G_{tj}^k – компоненты связности Λ,
$R(u_i,u_j)$ – компоненты оператора кривизны,
p и n – размерности подалгебры изотропии и ее дополнения соответственно,
$i,j,k,l,s = 1,2,\ldots,n;\ t = 1,2,\ldots,p$

↓

Применение систем компьютерной математики:
1) пишем процедуру для отыскания компонент оператора кривизны;
2) задаем массивы структурных констант (d_{ij}^k), (D_{ij}^t), $(\bar{d}_{tj}^k)$, *метрический тензор* (g_{ij}) *и находим компоненты тензора кривизны*

↓

Задача: *найти компоненты оператора одномерной кривизны* $\mathcal{A}$ *нередуктивных однородных псевдоримановых многообразий*

↓

Математическая модель:
$$\mathcal{A}_i^l = A_{ij}g^{jl},$$
$$A_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(r_{ij} - \frac{scal\cdot g_{ij}}{2(n-1)}\right),$$
$$r_{ij} = \textstyle\sum_{s=1}^n R_{si}(u_s,u_j),$$
$$scal = r_{ij}g^{ij},\quad i,j,l = 1,2,\ldots,n,$$
где $\mathcal{A}_i^l$ – компоненты оператора одномерной кривизны,
$R(u_i,u_j)$ – компоненты оператора кривизны,
A_{ij} – компоненты тензора одномерной кривизны,
r_{ij} – компоненты тензора Риччи,
$scal$ – скалярная кривизна,
g_{ij} – компоненты метрического тензора,
g^{sk} – компоненты кометрического тензора

↓

Применение систем компьютерной математики:
1) пишем процедуру для отыскания компонент оператора одномерной кривизны;
2) используя найденные выше компоненты оператора кривизны и метрического тензора, находим оператор одномерной кривизны

Решение задачи на каждом этапе проводилось согласно следующему алгоритму. Первоначально строилась удобная для вычислительной работы модель исследуемого объекта. Далее разрабатывалась программа в среде пакета аналитических вычислений Maple. На следующем шаге производился анализ полученных результатов. После чего делался вывод о структуре изучаемого объекта или о возможности уточнения модели.

Оператор одномерной кривизны нередуктивных однородных лоренцевых многообразий размерности 4. При помощи описанных алгоритмов и пакета символьных вычислений Maple вычислен и исследован спектр оператора одномерной кривизны $\mathcal{A}$ нередуктивных однородных лоренцевых многообразий размерности 4. Кроме того, определен симметрический оператор $\mathtt{A}$, матрица которого соответствует матрице тензора одномерной кривизны, и изучен вопрос о возможных сигнатурах данного оператора на четырехмерных нередуктивных однородных лоренцевых многообразиях.

Теорема 2. *Пусть* $(M = G/H, g)$ *— нередуктивное однородное лоренцево 4-многообразие, и* H *связна. Тогда спектр оператора одномерной кривизны* $\mathcal{A}$ *на* M *содержится в конечном списке.*

Доказательство. Проверим истинность теоремы 2 для случая A2. В силу теоремы 1 подалгебра изотропии $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\{h_1 = e_4\}$. Возьмем $\mathfrak{m} = \mathrm{span}\{u_1 = e_1, u_2 = e_2, u_3 = e_3, u_4 = e_5\}$. Тогда ненулевые структурные уравнения будут иметь вид $[u_1, u_4] = (\alpha + 1)u_1$, $[u_2, u_4] = \alpha u_2$, $[u_3, u_4] = (\alpha - 1)u_3$, $[h_1, u_2] = -u_1$, $[h_1, u_3] = -u_2$, $[h_1, u_4] = h_1$. Используя инвариантность псевдоримановой метрики, находим форму метрического тензора относительно базиса $\{u_i\}$ $g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & b & c \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$, $ad \neq 0$. Применяя изложенный выше алгоритм и его реализацию в среде пакета символьных вычислений Maple, вычисляем компоненты оператора одномерной кривизны $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha^2}{d} & 0 & -\frac{b(3\alpha-2)}{2ad} & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha^2}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha^2}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha^2}{d} \end{pmatrix}$, где $ad \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Приведя матрицу оператора $\mathcal{A}$ к жордановой форме $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha^2}{d} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha^2}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha^2}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha^2}{d} \end{pmatrix}$, $d \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$,получаем требуемое.

Теорема 3. *В качестве сигнатур оператора тензора одномерной кривизны* $\mathtt{A}$ *на четырехмерном нередуктивном однородном лоренцевом многообразии типа A2 реализуются только сигнатуры вида* $(-,0,0,0)$, $(0,0,0,0)$, $(0,0,0,+)$, $(-,-,-,+)$, $(-,-,+,+)$.

Доказательство. Характеристический многочлен матрицы оператора $\mathtt{A}$ имеет вид $-\frac{1}{16d^3}(2xd + a\alpha^2)B(x)$, где $B(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$, $p = -8d^2 < 0$, $q = -4d\left(\alpha^2(b+d) + b(2-3\alpha)\right)$, $r = 2\alpha^2(\alpha^2(a^2+c^2-bd) - bd(2-3\alpha)$, $s = a^2\alpha^6$, $ad \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}$. Откуда, очевидно, $a_1 = -\frac{a\alpha^2}{ad}$ и $a_2a_3a_4 = \frac{a^2\alpha^6}{8d^2} \geq 0$. При этом равенство нулю достигается только при $\alpha = 0$.

Пусть $\alpha = 0$. Тогда характеристический многочлен преобразуется к виду $\frac{x}{d^2}(d^2x^3 + bdx^2)$, и собственные значения $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4 = -\frac{b}{d}$. Таким образом, реализуются сигнатуры $(-,0,0,0)$, $(0,0,0,0)$, $(0,0,0,+)$. Если же $\alpha \neq 0$, то $a_2a_3a_4 = \frac{a^2\alpha^6}{8d^2} > 0$, и для $B(x)$ необходимо проверить возможность сигнатур $(+,+,+)$ и $(-,-,+)$.

Покажем, что сигнатура $(+,+,+)$ не реализуется для $B(x)$. Предположим противное, т.е. $a_i > 0$, $i = 2,3,4$. По теореме Виета имеем $-\frac{4d\left(\alpha^2(b+d)+b(2-3\alpha)\right)}{8d^2} > 0$, $-\frac{\alpha^2(\alpha^2(a^2+c^2-bd)-bd(2-3\alpha)}{4d^2} > 0$. Что приводит к противоречию и доказывает невозможность сигнатуры $(+,+,+)$ для $B(x)$.

Непосредственной подстановкой проверяется, что при $\alpha = a = d = 1$, $b = c = 0$ собственные значения $a_1 = a_2 = a_3 = -\frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{2}$, а при $\alpha = a = 1, d = -1$, $b = c = 0$ выполняется $a_1 = a_4 = \frac{1}{2}$, $a_2 = a_3 = -\frac{1}{2}$. Это подтверждает возможность сигнатуры $(-,-,+)$ для $B(x)$ и завершает доказательство теоремы.

Библиографический список

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. — М., 1981.

2. Родионов Е.Д., Славский В.В. Одномерная секционная кривизна римановых многообразий // ДАН. — 2002. — Т. 387, № 4.

3. Воронов Д.С., Гладунова О.П. Сигнатура оператора одномерной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2010. — № 1/2.

4. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. О спектре операторов кривизны конформно плоских групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 461, № 5.

5. Клепиков П.Н. О допустимых значениях спектра оператора одномерной кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой // Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники : сборник трудов Всерос. конф., Барнаул, 24-26 ноября, 2015. — Барнаул, 2015.

6. Клепикова С.В., Хромова О.П. О спектре оператора тензора одномерной кривизны левоинвариантных лоренцевых метрик трехмерных групп Ли // Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники : сборник трудов Всерос. конф., Барнаул, 24-26 ноября, 2015. — Барнаул, 2015.

7. Stephani H., Kramer D., MacCallum M., Hoenselaers C., Herlt E. Exact Solutions of Einstein's Field Equations. — Cambridge, 2003.

8. Fels M.E., Renner A.G. Non-reductive Homogeneous Pseudo-Riemannian Manifolds of Dimension Four // Canad. J. Math. — 2006. — Vol. 58 (2).