УДК 517.586

Идемпотентный аналог преобразования Лежандра и его применение в цифровой обработке сигналов*

М.В. Куркина, С.П. Семенов, В.В. Славский, О.В. Самарина, О.А. Петухова, А.А. Петров, А.А. Финогенов, В.А. Самарин

Югорский государственный университет (Ханты-Мансийск, Россия)

Idempotent Analog of the Legendre Transformation and Its Application in Digital Processing of Signals

M.V. Kurkina, S.P. Semenov, V.V. Slavsky, O.V. Samarina, O.A. Petuhova, A.A. Petrov, A.A. Finogenov, V.A. Samarin

Ugra State University (Khanty-Mansiysk, Russia)

В последние годы в рамках международного центра «Софус Ли» получила интенсивное развитие новая область математики — идемпотентная, или «тропическая» математика, что отражено в работах В.П. Маслова и его учеников Г.Л. Литвинова, А.Н. Соболевского.

Преобразование Лежандра играет важную роль в теоретической физике, классической и статистической механике, термодинамике. В математике и ее приложениях преобразование Лежандра основано на понятии двойственности векторных пространств и теории двойственности для выпуклых функций и подмножеств векторного пространства.

Цель данной работы — выйти за рамки линейных векторных пространств, используя аналогичные понятия двойственности в конформно-плоской римановой геометрии и в идемпотентной алгебре.

По аналогии с полярным преобразованием конформно-плоской римановой метрики, введенным в работах Е.Д. Родионова и В.В. Славского, строится абстрактный идемпотентный аналог преобразования Лежандра. Для периодического сигнала находится в системе Mathematica его преобразование Лежандра. Исследуются возможности для цифровой обработки сигналов и изображений.

Ключевые слова: конформно-плоские метрики, преобразование Лежандра, одномерная кривизна.

In recent years, a new area of mathematics — idempotent or “tropical” mathematics — has been intensively developed within the framework of the Sofus Lee international center, which is reflected in the works of V.P. Maslov, G.L. Litvinov, and A.N. Sobolevsky.

The Legendre transformation plays an important role in theoretical physics, classical and statistical mechanics, and thermodynamics. In mathematics and its applications, the Legendre transformation is based on the concept of duality of vector spaces and duality theory for convex functions and subsets of a vector space.

The purpose of this paper is to go beyond linear vector spaces using similar notions of duality in conformally flat Riemannian geometry and in idempotent algebra.

An abstract idempotent analog of the Legendre transformation is constructed in a way similar to the polar transformation of the conformally flat Riemannian metric introduced in the works of E.D. Rodionov and V.V. Slavsky. Its capabilities for digital processing of signals and images are being investigated.

Key words: conformally-flat metrics, Legendre transform, one-dimensional curvature.

DOI 10.14258/izvasu(2020)4-15

Введение. Пусть функция $f : R^n \to \overline{R}$ задана на евклидовом арифметическом пространстве. Преобразованием Юнга-Фенхеля функции f называют функцию f^*, где

$$f^*(\xi) = \sup_x \left[(\xi, x) - f(x)\right]. \qquad (1)$$

Формула (1) есть обобщение классического преобразования Лежандра для достаточно гладких функций f и f^*, в этом случае f и f^* связаны соотношением

$$(x, \xi) = f(x) + f^*(\xi), \text{ где } \xi = \nabla f(x), \; x = \nabla f^*(\xi).$$

Если ограничиться случаем $n = 1$, то скалярное произведение (ξ, x) есть просто произведение двух

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проектов 18-47-860016, 18-01-00620), при поддержке Научного Фонда ЮГУ № 13-01-20/10.

чисел, тогда

$$x \cdot \xi = f(x) + f^*(\xi),\ \xi = \frac{df(x)}{dx},\ x = \frac{df^*(\xi)}{d\xi}.$$

Преобразование Лежандра обладает рядом замечательных свойств. Нас в данной работе будут интересовать следующие свойства:

1* неравенство $x \cdot \xi \leq f(x) + f^*(\xi)$, которое является обобщением неравенства Юнга,

2* в случае выпуклых функций преобразование Лежандра инволютивно $f^{**} = f$,

3* в общем случае $f^{**} \leq f$ и f^{**} — есть выпуклая оболочка функции f.

Преобразование Лежандра применяется в физике, в теории дифференциальных уравнений, в теории выпуклых множеств [1-19]. Из новых применений преобразования Лежандра можно отметить применения в цифровой обработке сигналов [1–3].

Полярное преобразование конформно-плоской метрики. В данной части мы используем обозначения и результаты работы [5]. Пусть R — числовая прямая, R^{n+1} — евклидово $(n+1)$-мерное арифметическое пространство, $M^{n+2} = R^{n+1} \times R$ — псевдоевклидово пространство, скалярный квадрат вектора $\vec{w} = [\vec{x}, \zeta] \in M^{n+2}$ в котором равен $\langle \vec{w} \rangle^2 = |\vec{x}|^2 - \zeta^2$, где $|\vec{x}|^2$ — скалярный квадрат вектора $\vec{x} \in R^{n+1}$. Обозначим через

$$C^+ = \left\{ [\vec{x}, \zeta] \in M^{n+2} : |\vec{x}|^2 - \zeta^2 = 0,\ \zeta > 0 \right\},$$

верхнюю часть изотропного конуса в M^{n+2}. В дальнейшим, если будет ясно из контекста, мы будем обозначать $\vec{x}$ через x.

Лемма 1. Пусть на единичной сфере $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ задана конформно-плоская метрика

$$ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}, \quad x \in S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1},$$

где $f(x)$ функция класса C^1. Тогда определено каноническое изометрическое вложение, задаваемое формулой

$$Z : x \in S^n \to \left[\frac{x}{f(x)}, \frac{1}{f(x)} \right] \in C^+. \tag{2}$$

Образ $Z(S^n) = F \subseteq C^+$ — пространственно подобная n-мерная поверхность. В дальнейшем будем отождествлять конформно-плоскую метрику с поверхностью F. Предположим, что функция $f(x)$ достаточно гладкая, тогда поверхность F регулярна, и в каждой точке $Z(x) \in F$ определено касательное n-мерное пространство $T_x(F)$. Существует единственный вектор $Z^*(x) \in C^+$ такой, что

$$\langle Z, Z^* \rangle = -1, \quad Z^* \perp T_x(F), \tag{3}$$

где ортогональность понимается относительно скалярного произведения в M^{n+2}.

Лемма 2. Пусть функция $f(\vec{x})$, задающая конформно-плоскую метрику, по однородности распространена на все пространство $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда вектор Z^* явно выражается через f и $\vec{\nabla} f$ в R^{n+1}:

$$Z^*(\vec{x}) = \left[-\vec{\nabla} f + \frac{|\vec{\nabla} f|^2}{2f} \vec{x}, \frac{|\vec{\nabla} f|^2}{2f} \right], \tag{4}$$

где $\vec{x} \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\vec{\nabla} f$ градиент функции f в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.

Определение 1. Если точка $Z \in F$ пробегает поверхность F, то точка Z^* пробегает двойственную поверхность F^*. Соответствующую конформно-плоскую метрику $ds^{*2} = \frac{dy^2}{f^{*2}(y)}$, $y \in S^n$, будем называть **полярной** к исходной метрике [4, 14]. Сравнивая формулы (2) и (4), имеем:

$$\left[-\vec{\nabla} f + \frac{|\nabla f|^2}{2f} \vec{x}, \frac{|\nabla f|^2}{2f} \right] \equiv \left[\frac{y}{f^*(y)}, \frac{1}{f^*(y)} \right].$$

Откуда получаем формулы для перехода к полярной конформно-плоской метрике:

$$f^*(y) = \frac{2f(x)}{|\nabla f|^2}, \quad \vec{y} = \vec{x} - 2f(x) \frac{\vec{\nabla} f}{|\nabla f|^2}. \tag{5}$$

Лемма 3. Пусть $f : R^{n+1} \to R$ произвольная однородная степени один функция на R^{n+1}. Отображение $H_f : S^n \to S^n$, определяемое формулой

$$H_f : \vec{x} \in S^n \to \vec{x} - 2f(x) \frac{\vec{\nabla} f}{|\nabla f|^2} \in S^n, \tag{6}$$

сохраняет норму вектора: $|H_f(\vec{x})| = |\vec{x}|$.

Определение 2. Отображение H_f назовем конформным градиентом функции f. Если отображение H_f — имеет обратное H_f^{-1}, то полярная метрика определяется функцией

$$f^*(y) = \left. \frac{2f(x)}{|\nabla f|^2} \right|_{x = H_f^{-1}(y)}.$$

Замечание. Из определения (1) следует двойственность метрики $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$, $x \in S^n$ и метрики $ds^{*2} = \frac{dy^2}{f^{*2}(y)}$, $y \in S^n$. Поэтому при наличии соответствующей регулярности функции $f^*(y)$ будут справедливы равенства:

$$\begin{array}{ll} f^*(y) = \frac{2f(x)}{|\nabla f(x)|^2}, & \vec{y} = \vec{x} - 2f(x) \frac{\vec{\nabla} f(x)}{|\nabla f(x)|^2}, \\ f(x) = \frac{2f^*(y)}{|\nabla f^*(y)|^2}, & \vec{x} = \vec{y} - 2f^*(y) \frac{\vec{\nabla} f^*(y)}{|\nabla f^*(y)|^2}. \end{array} \tag{7}$$

Определение 3. Одномерная секционная кривизна конформно-плоской метрики $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$ в R^n задается формулой [16–18]:

$$K_{1/2}(f, x, \xi) = f \frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{1}{2} |\nabla f|^2. \tag{8}$$

здесь $\dfrac{d^2 f}{d\xi^2}$ — вторая производная функции в точке $x \in R^n$ вдоль единичного вектора ξ, ∇f — градиент функции f в R^n. Формула верна как в плоском случае, так и для единичной сферы, в этом случае функция $f : S^n \to R$ продолжается по однородности на R^{n+1}, $x \in S^n \subset R^{n+1}$, ξ — единичный касательный к сфере в точке x вектор, ∇f — градиент функции в R^{n+1}.

Определение 4. Формулу (1) можно распространить на конформно-плоские метрики, определенные на единичной n-мерной сфере $S^n \subset R^{n+1}$ в форме;

$$f^*(y) = \max_{x \in S^n} \frac{\|x - y\|^2}{2f(x)}, \tag{9}$$

здесь $f(x)$ положительная конформно-выпуклая функция на сфере [6], то есть функция для которой конформно-плоская метрика $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$ имеет неотрицательную одномерную секционную кривизну, $\|y - x\|$ — хордовое расстояние между точками на сфере, $f^*(y)$ $y \in S^n$ функция задающая двойственную или полярную метрику $ds^{*2} = \frac{dy^2}{f^{*2}(y)}$. Причем основные свойства (инволютивность и т.д.) сохраняются. В работе [8] было предложено также назвать преобразование (9) преобразованием Лежандра функции $f(x)$ $x \in S^n$.

Определение 5. Обобщая эти понятия приходим к определению обобщенного преобразования Лежандра с формулой

$$f^*(y) = \max_{x \in X} \frac{A(x, y)}{2f(x)} \tag{10}$$

где X — компактное метрическое пространство, $A(x, y)$ неотрицательная непрерывная функция $(x, y) \in X \times X$, $f(x)$ — положительная непрерывная функция, $f^*(y)$ ее преобразование Лежандра, $A(x, y)$ будем называть ядром преобразования.

С вычислительной точки зрения формула (9) имеет дискретный вид:

$$f^*(y_j) = \max_{x_i \in S^n} \frac{\|y_j - x_i\|^2}{2f(x_i)}, \tag{11}$$

где $\{x_i\}$ конечная сетка точек на сфере. В данной работе предлагается абстрактное обобщение формулы (11) для идемпотентной математики.

Определение 6. Пусть $n > 1$, R_n^+ — множество наборов $f = \{f_i\}$, $i = 1, \dots, n$ положительных чисел, $A = \|A_{ji}\|$ $i, j = 1, \dots, n$ симметричная квадратная матрица неотрицательных чисел с нулевой диагональю. Обозначим через L_A — отображение множества R_n^+ в себя $L_A : R_n^+ \to R_n^+$, определяемое формулой $L_A[\{f_i\}] = \{f_j^*\}$, где

$$f_j^* = \max_i \frac{A_{ji}}{f_i}. \tag{12}$$

Замечание. В формуле (12) участвуют только две операции над неотрицательными числами умножение (деление) и max (min), с помощью функции log это множество чисел можно отождействить с идемпотентным полукольцом $R_{\max} = R \cup \{-\infty\}$ см. [9, 7].

Теорема 1. Преобразование (12) полукольца $R_{\max} = R \cup \{-\infty\}$ обладает основными свойствами классического преобразования Лежандра:

1* справедливо неравенство $f_j^* \cdot f_i \geq A_{ji}$,

2* $f_i^{***} = f_i^* \quad i = 1, \dots, n$,

3* $f_i^{**} \leq f_i \quad i = 1, \dots, n$.

где $\{f_i^*\} = L_A[\{f_i\}]$, $\{f_i^{**}\} = L_A[\{f_i^*\}]$, $\{f_i^{***}\} = L_A[\{f_i^{**}\}]$.

Пример 1. Рассмотрим, как выглядит L_A при $n = 3$, пусть матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\{f_i^*\} = L_A[\{f_i\}]$, $\{f_i^{**}\} = L_A[\{f_i^*\}]$ имеют вид

$$f_1^* = \max\left(\frac{a}{f_2}, \frac{b}{f_3}\right),$$
$$f_2^* = \max\left(\frac{a}{f_1}, \frac{c}{f_3}\right),$$
$$f_2^* = \max\left(\frac{b}{f_1}, \frac{c}{f_2}\right);$$
$$f_1^{**} = \max\left(a \min\left(\frac{f_1}{a}, \frac{f_3}{c}\right), b \min\left(\frac{f_1}{b}, \frac{f_2}{c}\right)\right),$$
$$f_2^{**} = \max\left(c \min\left(\frac{f_1}{b}, \frac{f_2}{c}\right), a \min\left(\frac{f_2}{a}, \frac{f_3}{b}\right)\right),$$
$$f_3^{**} = \max\left(c \min\left(\frac{f_1}{a}, \frac{f_3}{c}\right), b \min\left(\frac{f_2}{a}, \frac{f_3}{b}\right)\right).$$

Замечание. Как показали численные эксперименты, если матрица A в теореме **1** не обладает требуемыми свойствами, то теорема неверна.

Гипотеза. Теорема **1** справедлива в случае абстрактного полукольца.

Пример 2. Преобразование Лежандра периодического сигнала. Будем трактовать периодический сигнал как положительную функцию на единичной окружности и сопоставим ей конформно-плоскую метрику (меру) $ds^2 = \frac{d\varphi^2}{h^2(\varphi)}$ на окружности S^1, здесь $h(\varphi)$ — гладкая периодическая функция. Обозначим через $f(x)$, $x \in R^2$ однородное степени один продолжение функции h на плоскость R^2.

Тогда на единичной окружности имеем:

$$x = [\cos(\varphi), \sin(\varphi)],$$
$$f(x) = h(\varphi),$$
$$\nabla f = h(\varphi)[\cos(\varphi), \sin(\varphi)] + h'(\varphi)[-\sin(\varphi), \cos(\varphi)],$$
$$|\nabla f|^2 = h(\varphi)^2 + h'(\varphi)^2.$$

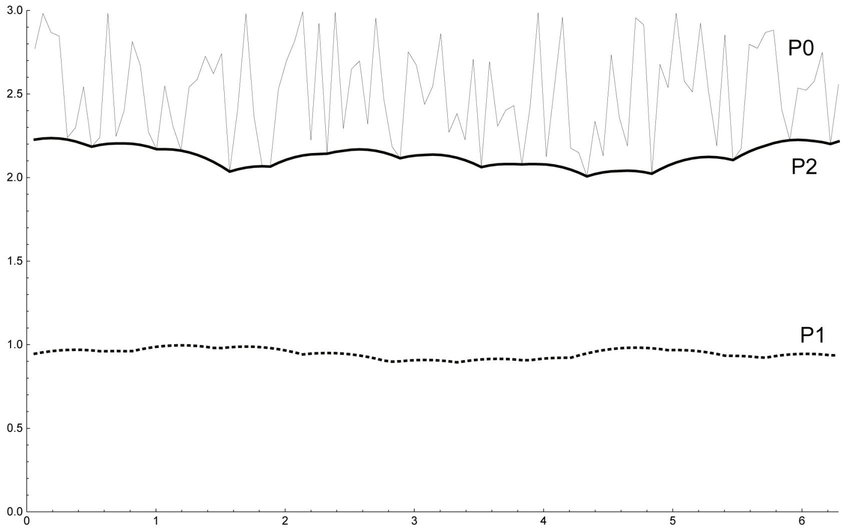

Рис. 1. Рисунок к примеру 2: $P0 \geq P0^{**} \geq P0^*$

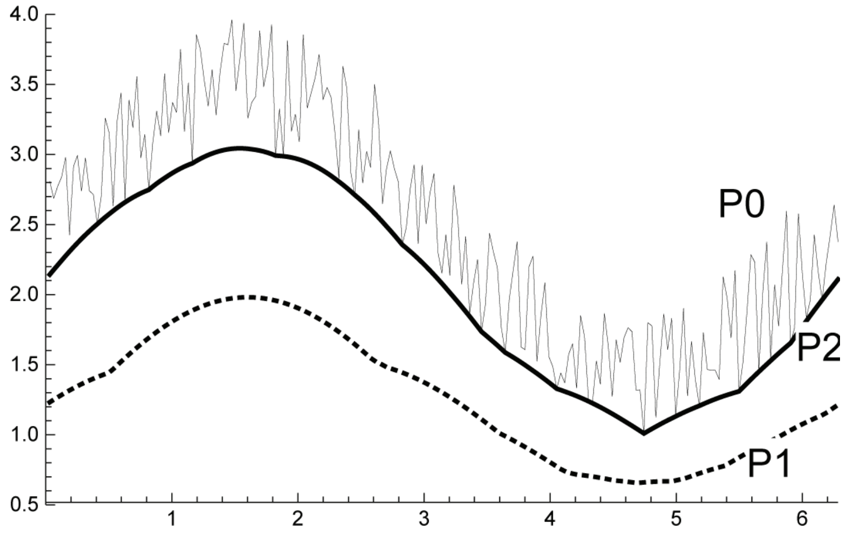

Рис. 2. Рисунок к примеру 2: $P0 \geq P0^{**} \geq P0^*$

положим $y = [\cos(\varphi^*), \sin(\varphi^*)]$, тогда получим формулы (7) перехода к сопряженной конформно-плоской метрики $ds^{*2} = \frac{d\varphi^{*2}}{h^{*2}(\varphi^*)}$:

$$\varphi^* = \varphi - \arctan\left(\frac{2h(\varphi)h'(\varphi)}{h'^2(\varphi) - h^2(\varphi)}\right),$$

$$h^*(\varphi^*) = \frac{2h(\varphi)}{h^2(\varphi) + h'^2(\varphi)}.$$

Отсюда получим:

$$\frac{d\varphi^*}{d\varphi} = 1 - \frac{2\left(h(\varphi)h''(\varphi) - h'(\varphi)^2\right)}{h'(\varphi)^2 + h(\varphi)^2},$$

или, полагая $h(\varphi) = \exp[\sigma(\varphi)]$, получим:

$$\frac{d\varphi^*}{d\varphi} = 1 - \frac{2\sigma''(\varphi)}{1 + \sigma'(\varphi)^2}.$$

На рисунках 1, 2 приведены примеры преобразования Лежандра для периодического (зашумленного) сигнала $P0$, в результате получен $P1 = P0^*$, и при двукратном преобразовании $P2 = P0^{**}$ – выпуклая огибающая.

Код в системе Mathematica к примеру 2.

```
n=100;(*число отсчетов в сигнале g*)
\[Phi]=Table[2*Pi*i/n,{i,n}];
A=Table[4*(Sin[(\[Phi][[i]]
-\[Phi][[j]])/2])^2,
{i,n},{j,n}];
(*матрица хордовых расстояний*)
Legr[A_,g_]:=Block[{i,k,U,n},
n=Length[g];
```

```
U=Table[Table[A[[i,k]]/(2*g[[i]]),
{i,n}],{k,n}];Table[Max[U[[k]]],
{k,n}]](*преобразование Лежандра*)
f=RandomReal[{2,3},n];(*сигнал f*)
f1=Legr[A,f];(*сигнал L(f)*)
f2=Legr[A,f1];(*сигнал LL(f)*)
f3=Legr[A,f2];(*сигнал LLL(f)*)
xy0=Table[{\[Phi][[i]],f[[i]]},{i,n}];
(*исходной f *)
xy1=Table[{\[Phi][[i]],f1[[i]]},{i,n}];
(*таблица f^{*} *)
xy2=Table[{\[Phi][[i]],f2[[i]]},{i,n}];
(*таблица f^{**} *)
xy3=Table[{\[Phi][[i]],f3[[i]]},{i,n}];
(*таблица f^{***} *)
p3=ListLinePlot[xy3,
PlotStyle->Directive[Red],
PlotRange->{{0,2*Pi},{0,3}}];
(*график f^{***}*)
p2=ListLinePlot[xy2,
PlotStyle->Directive[Black,Thick],
PlotRange->{{0,2*Pi},{0,3}}];
(*график f^{**} *)
p1=ListLinePlot[xy1,
PlotStyle->Directive[Black,Thick,Dotted],
PlotRange->{{0,2*Pi},{0,3}}];
(*график f^{*} *)
p0=ListLinePlot[xy0,
PlotStyle->Directive[Black,Thin],
PlotRange->{{0,2*Pi},{0,3}}];
(*график f*)
Show[p0,p1,p2]
```

Заключение. В данной работе по аналогии с полярным преобразованием конформно-плоской метрики Е.Д. Родионова, В.В. Славского и классическим преобразованием Лежандра строится идемпотентный аналог преобразования Лежандра. Приведена программа в системе Mathematica реализующая численно преобразование для периодических сигналов. Исследуются ее возможности при цифровой обработке сигналов и изображений.

Библиографический список

1. Handa A., Newcombe R.A., Angeli A., Davison A.J. Applications of Legendre-Fenchel transformation to computer vision problems. URL: http://www.doc.ic.ac.uk/ ahanda/.

2. Abadi M., Enguerran Grandchamp E. Legendre Spectrum for texture classification // IEEE Xplore DOI: 10.1109/ICOSP.2006.345588.

3. Bachtis M.S. et al. Implementation of the Legendre transform for the muon track segment reconstruction in the ATLAS MDT chambers // IEEE Xplore DOI: 10.1109/NSSMIC.2007.4436434.

4. Владимиров В.С. Преобразование Лежандра выпуклых функций // Матем. заметки. 1967. Т. 1, вып. 6.

5. Родионов Е.Д., Славский В.В. Полярное преобразование конформно-плоских метрик // Матем. тр. Т. 20, № 2 (2017). Siberian Adv. Math. 2018. 28(2).

6. Kurkina M.V., Slavsky V.V., Rodionov E.D. Conformally convex functions and conformally flat metrics of nonnegative curvature // Докл. АН СССР. 2015. 91(3).

7. Литвинов Г.Л., Маслов В.П., Соболевский А.Н. Идемпотентная математика и интервальный анализ // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6. № 6.

8. Куркина М.В. Об изменении кривизны конформно-плоской метрики при преобразовании Лежандра // Известия Алт. ун-та. 2018. 4(102)

9. Sergeev S., Schneider H. CSR expansions of matrix powers in max algebra. Transactions of the American Mathematical Society. 2012. № 364(11).

10. Славский В.В. Конформно плоские метрики ограниченной кривизны на n-мерной сфере. Исследования по геометрии «в целом» и математическому анализу. Новосибирск, 1987. Т. 9.

11. Hertrich-Jeromin U. Introduction to Mobius Differential Geometry. London mathematical society lecture note series. Cambridge University Press, 2003.

12. Решетняк Ю.Г. Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск, 1996.

13. Топоногов В.А. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей. М., 2012.

14. Slavskii V.V. Conformally flat metrics and the geometry of the pseudo-Euclidean space // Siberian Math. J. (1994) 35, № 3.

15. Славский В.В. Оценка коэффициента квазиконформности области через кривизну квазигиперболической метрики // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4.

16. Балащенко В.В., Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Однородные пространства: теория и приложения : монография. Ханты-Мансийск, 2008.

17. Родионов Е.Д., Славский В.В. Одномерная секционная кривизна римановых многообразий // Доклады АН. 2002. Т. 387, № 4.

18. Nikonorov Yu.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. Geometry of homogeneoues Riemannian manifolds // Journal of Mathematical Scieces. 2007. Vol. 146, № 6.

19. Kurkina M.V., Rodionov E.D., and Slavskii V.V. Conformally Convex Functions and Conformally Flat Metrics of Nonnegative Curvature // Doklady Mathematics. 2015. Vol. 91, № 3.