УДК 535.64

О гипотезе Цербо на группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой

В.В. Балащенко[1], *П.Н. Клепиков*[2] , *Е.Д. Родионов*[2], *О.П. Хромова*[2]

[1]Белорусский государственный университет (Минск, Белоруссия)
[2]Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

On the Cerbo Conjecture on Lie Groups with the Left-Invariant Lorentzian Metric

V.V. Balashchenko[1], *P.N. Klepikov*[2], *E.D. Rodionov*[2], *O.P. Khromova*[2]

[1]Belarusian State University (Minsk, Belarus)
[2]Altai State University (Barnaul, Russia)

К числу многообразий с ограничениями на тензорные поля относятся многообразия Эйнштейна, эйнштейново-подобные многообразия, конформно плоские многообразия и ряд других важных классов многообразий. Изучению таких многообразий посвящены работы многих математиков, что отражено в монографиях А. Бессе, М. Берже, М.-Д. Цао, М. Вана.

Одним из естественных обобщений метрик Эйнштейна являются солитоны Риччи. Если риманово многообразие является группой Ли, то говорят об инвариантных солитонах Риччи. Наиболее подробно инвариантные солитоны Риччи изучались в случае унимодулярных групп Ли с левоинваринтной римановой метрикой и в случае малой размерности. Так, Л. Цербо доказал, что на унимодулярных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой и связностью Леви-Чивиты все инвариантные солитоны Риччи тривиальны. В неунимодулярном случае аналогичный результат до размерности четыре был получен П.Н. Клепиковым и Д.Н. Оскорбиным.

В работе изучаются инвариантные солитоны Риччи на трехмерных унимодулярных группах Ли с лоренцевой метрикой. Результаты исследования показывают, что унимодулярные группы Ли с левоинваринтной лоренцевой метрикой допускают инвариантные солитоны Риччи, отличные от тривиальных. В работе получена полная классификация инвариантных солитонов Риччи на трехмерных унимодулярных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой.

Ключевые слова: инвариантные солитоны Риччи, группы Ли, левоинвариантные лоренцевы метрики.

Manifolds with constraints on tensor fields include Einstein manifolds, Einstein-like manifolds, conformally flat manifolds, and a number of other important classes of manifolds. The work of many mathematicians is devoted to the study of such manifolds, which is reflected in the monographs of A. Besse, M. Berger, M.-D. Cao, M. Wang.

Ricci solitons are one of the natural generalizations of Einstein's metrics. If a Riemannian manifold is a Lie group, one speaks of invariant Ricci solitons.

Invariant Ricci solitons were studied in most detail in the case of unimodular Lie groups with left-invariant Riemannian metrics and the case of low dimension. Thus, L. Cerbo proved that all invariant Ricci solitons are trivial on unimodular Lie groups with left-invariant Riemannian metric and Levi-Civita connection. A similar result up to dimension four was obtained by P.N. Klepikov and D.N. Oskorbin for the non-unimodular case.

We study invariant Ricci solitons on three-dimensional unimodular Lie groups with the Lorentzian metric. The study results show that unimodular Lie groups with left-invariant Lorentzian metric admit invariant Ricci solitons other than trivial ones. In this paper, a complete classification of invariant Ricci solitons on three-dimensional unimodular Lie groups with left-invariant Lorentzian metric is obtained.

Keywords: invariant Ricci solitons, Lie groups, left–invariant Lorentzian metrics.

DOI: 10.14258/izvasu(2022)1-12

1. Предварительные сведения. Пусть (M, g, ∇) — (псевдо)риманово многообразие со связностью Леви-Чивиты. Определим тензор кривизны и тензор Риччи связности ∇ соответственно равенствами $R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad r(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \to R(X,Z)Y)$.

Определение 1. *Метрика g полного риманова многообразия (M, g) называется солитоном Рич-*

чи, если она удовлетворяет уравнению

$$r = \Lambda g + L_P g, \tag{1}$$

где r — тензор Риччи метрики g, $L_P g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля P, константа $\Lambda \in \mathbb{R}$.

Если $M = G/H$ — однородное пространство, то однородная риманова метрика, удовлетворяющая (1), называется однородным солитоном Риччи, а если $M = G$ — группа Ли и поле P левоинвариантно — инвариантным солитоном Риччи.

Замечание 1. *Производная Ли имеет вид: $L_P g(X,Y) = Pg(X,Y) + g([X,P],Y) + g(X,[Y,P])$. Если солитон Риччи инвариантен, то $L_P g(X,Y) = g([X,P],Y) + g(X,[Y,P])$ для произвольных инвариантных полей X и Y.*

Определение 2. *Метрика g (псевдо)риманова многообразия (M,g) называется тривиальным солитоном Риччи, если $L_P g = \tau g$ при некоторой константе $\tau \in \mathbb{R}$.*

Заметим, что ранее инвариантные солитоны Риччи изучались Л. Censo...

Теорема 1. [1] *Для любой конечномерной унимодулярной группы Ли с левоинваринтной римановой метрикой и связностью Леви-Чивиты все инвариантные солитоны Риччи тривиальны.*

Теорема 2. [2] *Для любой четырехмерной неунимодулярной группы Ли с левоинваринтной римановой метрикой и связностью Леви-Чивиты все инвариантные солитоны Риччи тривиальны.*

Пусть далее $M = G$ — группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Фиксируем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ левоинваринтных векторных полей в $\mathfrak{g}$ и положим

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, \quad g(e_i, e_j) = g_{ij}, \quad c_{ijs} = c_{ij}^k g_{ks},$$

где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли, g_{ij} — компоненты метрического тензора.

Компоненты связности Леви-Чивиты ∇ задаются формулами $\Gamma_{ij}^s = \frac{1}{2} g^{ks}(c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij})$.

Соответственно тензор кривизны R и тензор Риччи r в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ определяется равенствами $R_{ijks} = \left(\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + c_{ij}^l \Gamma_{lk}^p\right) g_{ps}, \quad r_{ik} = R_{ijks} g^{js}$.

Пусть P — левоинвариантное векторное поле. Тогда (1) можно переписать в терминах структурных констант алгебры Ли

$$r_{ij} = \Lambda g_{ij} - P^k (c_{ki}^s g_{sj} + c_{kj}^s g_{si}), \tag{2}$$

где r_{ij} — компоненты тензора Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$, g_{ij} — компоненты метрического тензора, P^k — координаты левоинвариантного векторного поля, c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Лемма. *[3] Инвариантный солитон Риччи тривиален тогда и только тогда, когда выполняется*

$$P^k (c_{ki}^s g_{sj} + c_{kj}^s g_{si}) = \tau g_{ij}. \tag{3}$$

Рассмотрим далее трехмерный случай. Следующая классификация для трехмерных метрических групп Ли была получена в [4–6].

Теорема 3. *Пусть G — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Тогда в алгебре Ли группы G существует псевдо-ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке:*

1. *Случай $\mathcal{A}_1$:*

$$[e_1, e_2] = \alpha_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_2 e_2,$$
$$[e_2, e_3] = \alpha_1 e_1,$$

с времениподобным e_1;

2. *Случай $\mathcal{A}_2$:*

$$[e_1, e_2] = (1 - \alpha_2)\, e_3 - e_2,$$
$$[e_1, e_3] = e_3 - (1 + \alpha_2)\, e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1,$$

с времениподобным e_3;

3. *Случай $\mathcal{A}_3$:*

$$[e_1, e_2] = e_1 - \alpha_1 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_1 e_2 - e_1,$$
$$[e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + e_2 + e_3,$$

с времениподобным e_3;

4. *Случай $\mathcal{A}_4$:*

$$[e_1, e_2] = \alpha_3 e_2, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_2 e_1 - \alpha_1 e_2,$$
$$[e_2, e_3] = -\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

с времениподобным e_1 и $\alpha_2 \neq 0$.

Основным результатом работы является

Теорема 4. *Пусть (G, g, ∇) — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой g и связностью Леви-Чивиты ∇. Тогда нетривиальные инвариантные солитоны Риччи групп Ли (G, g, ∇) исчерпываются списком:*

Случай $\mathcal{A}_2$:

1. $\Lambda = -\dfrac{\alpha_1^2}{2}, \quad P = \left(-\dfrac{\alpha_1}{2}, P^2, -P^2\right),$
   $\alpha_2 = \alpha_1 \neq 0,\ P^2 \in \mathbb{R};$
2. $\Lambda = 0, \quad P = (-\alpha_2, 0, 0)\,, \quad \alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0.$

Случай $\mathcal{A}_3$:

$$\Lambda = -\frac{\alpha_1^2}{2}, \quad P = (\alpha_1, -1, -1)\,, \quad \alpha_1 \in \mathbb{R}.$$

Случаи $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_4$ не допускают нетривиальных инвариантных солитонов Риччи.

2. Доказательство основной теоремы. В данном разделе докажем теорему 4. Для этого рассмотрим систему уравнений (2), определяющую инвариантных солитонов Риччи, а также систему уравнений (3) — условие тривиальности инвариантного солитона. Заметим, что в силу тензорного вида левой и правой частей уравнения (2) все вычисления достаточно провести для базиса теоремы 3.

Случай $\mathcal{A}_1$.

Запишем систему равенств (2) для определения инвариантных солитонов

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)=2\Lambda,\\
&(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)=2\Lambda,\\
&(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_2-+\alpha_3)=-2\Lambda,\\
&P^1(\alpha_3-\alpha_2)=0,\\
&P^2(\alpha 1+\alpha_3)=0,\\
&P^3(\alpha_1+\alpha_2)=0.
\end{aligned}$$

Решениями данной системы уравнений являются следующие инвариантные солитоны

1. $\Lambda=-\dfrac{1}{2}\alpha_3^2,\ -\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3\in\mathbb{R},\ P=(P^1,P^2,P^3)$;
2. $\Lambda=0,\ \alpha_1=0,\alpha_2=\alpha_3\in\mathbb{R},\ P=(P^1,0,0)$;
3. $\Lambda=0,\ \alpha_1=-\alpha_3\in\mathbb{R},\alpha_2=0,\ P=(0,P^2,0)$;
4. $\Lambda=0,\ \alpha_1=-\alpha_2\in\mathbb{R},\alpha_3=0,\ P=(0,0,P^3)$.

Условие (3) тривиальности солитона в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\begin{aligned}
&P^1(\alpha_3-\alpha_2)=0,\ P^2(\alpha 1+\alpha_3)=0,\\
&P^3(\alpha_1+\alpha_2)=0,\ \tau=0.
\end{aligned}$$

Очевидно, что все найденные в этом случае инвариантные солитоны удовлетворяют данному условию (т.е. являются тривиальными). При этом $\tau=0$.

Случай $\mathcal{A}_2$.

Запишем систему равенств (2) для рассматриваемого случая

$$\begin{aligned}
&P^3(\alpha_1-\alpha_2-1)-P^2=0,\\
&P^2(\alpha_2-\alpha_1-1)-P^3=0,\\
&\alpha_1-2\alpha_2=2P^1,\\
&\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_1^2-2\alpha_2+\alpha_1\alpha_2=-\Lambda+2P^1,\\
&\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_1^2-2\alpha_2-\alpha_1\alpha_2=\Lambda+2P^1.
\end{aligned}\tag{4}$$

Решениями данной системы уравнений являются следующие инвариантные солитоны

1. $\Lambda=-\dfrac{1}{2}\alpha_1^2,\ \alpha_1=\alpha_2\in\mathbb{R},\ P=\left(-\dfrac{\alpha_1}{2},P^2,-P^2\right)$;
2. $\Lambda=0,\ \alpha_1=0,\alpha_2\in\mathbb{R},\ P=(-\alpha_2,0,0)$.

Условие (3) тривиальности солитона в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\begin{aligned}
&P^1=0,\ \pm2P^1=\tau,\ P^2(\alpha_1-\alpha_2)+P^3=0,\\
&P^3(1+\alpha_2-\alpha_1)+P^2=0,\ \tau=0.
\end{aligned}\tag{5}$$

Очевидно, что первый из полученных инвариантных солитонов при $\alpha_1=0$ и $\tau=0$ будет удовлетворять (5) и иметь вид

$$\begin{aligned}
&\Lambda=\tau=\alpha_1=\alpha_2=0,\ \alpha_3,P^2\in\mathbb{R},\\
&P=(0,P^2,-P^2).
\end{aligned}\tag{6}$$

Второй инвариантный солитон будет удовлетворять (5) только при $\alpha_2=0$. Стоит отметить, что при этом он будет содержаться в (6) для $P^2=0$.

Случай $\mathcal{A}_3$.

Системы уравнений (2) и (3) в данном случае имеют соответственно вид

$$\begin{aligned}
&\alpha_1=P^1,\\
&P^2+P^3=-2,\\
&\alpha_1^2=-2\Lambda-4P^2+4P^3,\\
&4+\alpha_1^2=-2\Lambda-4P^3,\\
&4-\alpha_1^2=2\Lambda-4P^2.
\end{aligned}\tag{7}$$

и

$$\begin{aligned}
&P^1=0,\ 2P^2=\tau,\ -2P^3=\tau,\\
&-2P^2+2P^3=\tau,\ P^3+P^2=0.
\end{aligned}\tag{8}$$

Решением (7) является следующий инвариантный солитон

$$\Lambda=-\frac{\alpha_1^2}{2},\ \alpha_1\in\mathbb{R},\ P=(\alpha_1,-1,-1).$$

Данный солитон не является тривиальным, поскольку не удовлетворяет последнему равенству из (8).

Случай $\mathcal{A}_4$.

В данном случае система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned}
&P^1\alpha_1-P^2=0,\\
&P^1\alpha_2+P^2\alpha_1=0,\\
&\alpha_1\alpha_2+\alpha_1=-P^2\alpha_3,\\
&-\alpha_2^2-1=\Lambda,\\
&-\alpha_2+\alpha_2^2=-\Lambda+2P^3\alpha_2,\\
&\alpha_2-1=\Lambda-2P^1\alpha_3+2P^3.
\end{aligned}\tag{9}$$

Ее решениями являются следующие инвариантные солитоны:

1. $\Lambda = -2,\ \alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R},\ \alpha_2 = -1,\ P = (0,0,0)$;
2. $\Lambda = -2,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = 0,\ P = \left(P^2, P^2, 0\right)$;
3. $\Lambda = -2,\ \alpha_1 = \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = 0,\ P = \left(-P^2, P^2, 0\right)$.

Запишем теперь условие (3)

$$\begin{gathered} P^2\alpha_3 = 0,\ 2P^3\alpha_2 = \tau,\ -P^1\alpha_1 + P^2 = 0, \\ \tau = 0,\ P^1\alpha_2 + P^2\alpha_1 = 0,\ 2P^1\alpha_3 - 2P^3 = \tau. \end{gathered} \tag{10}$$

Непосредственной подстановкой найденных солитонов в (10) убеждаемся, что все они тривиальны. Теорема 4 доказана.

Заключение. В работе получена классификация инвариантных солитонов Риччи на трехмерных унимодулярных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, указаны нетривиальные инвариантные солитоны Риччи. Это позволяет дать ответ на гипотезу Л. Цербо в лоренцевом случае. В дальнейшем предполагается рассмотреть неунимодулярные группы Ли размерности 3, а также изучить инвариантные солитоны Риччи для метрических групп Ли более высоких размерностей.

Другие важные результаты по исследованию однородных и, в частности, инвариантных солитонов Риччи содержатся в [7–10].

Библиографический список

1. Cerbo L.F. Generic properties of homogeneous Ricci solitons // Adv. Geom. 2014. Is. 2. Vol. 14. DOI: 10.1515/advgeom-2013-0031.

2. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Однородные инвариантные солионы Риччи на четырехмерных группах Ли // Известия Алт. гос. ун-та. 2015. №. 1/2(85) DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.2-21.

3. Klepikov P.N., Rodionov E.D., Khromova O.P. Invariant Ricci Solitons on Three-Dimensional Metric Lie Groups with Semi-Symmetric Connection // Russian Mathematics. 2021. Vol. 65. № 8. DOI: 10.3103/S1066369X21080090.

4. Calvaruso G. Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds // J. Geom. Phys. 2007. Vol. 57 DOI: 10.1016/j.geomphys. 2006.10.005.

5. Rodionov E.D., Slavskii V.V., Chibrikova L.N. Locally conformally homogeneous pseudo-Riemannian spaces // Siberian Advances in Mathematics. 2007. Vol. 17. № 3.

6. Cordero L.A., Parker P.E. Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups // Rend. Mat. 1997. Vol. 17.

7. Griffin E. Gradient ambient obstruction solitons on homogeneous manifolds // Annals of Global Analysis and Geometry. 2021. Vol. 60. DOI: 10.1007/s10455-021-09784-3.

8. Arroyo R. M., Lafuente R. Homogeneous Ricci Solitons in Low Dimensions // International Mathematics Research Notices 2015. Vol. 2015. № 13. 2015 DOI:10.1093/imrn/rnu088.

9. He C., Petersen P., Wylie W. Warped product Einstein metrics on homogeneous spaces and homogeneous Ricci solitons // arxiv.org/abs/1302.0246.

10. Buttsworth T. $SO(2) \times SO(3)$-invariant Ricci solitons and ancient flows on S^4 // arxiv.org/abs/2104.12996.