УДК 532.546+536.425

Существование слабого решения двумерной задачи фильтрации в тонком пороупругом слое*

П.В. Гилев, А.А. Папин

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Existence of a Weak Solution to the Two-Dimensional Filtration Problem in a Thin Poroelastic Layer

P.V. Gilev, A.A. Papin

Altai State University (Barnaul, Russia)

В работе рассматривается математическая модель совместного движения двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде. Данная модель является обобщением классической модели Маскета-Леверетта, в которой пористость считается заданной функцией пространственной координаты. В основе изучаемой модели лежат уравнения сохранения массы жидкостей и пористого скелета, закон Дарси для жидкостей, учитывающий движение пористого скелета, формула Лапласа для капиллярного давления, реологическое уравнение для пористости типа Максвелла и условие равновесия «системы в целом». В приближении тонкого слоя исходная задача сводится к последовательному определению пористости твердого скелета и его скорости, а затем выводится эллиптико-параболическая система для «приведенного давления» и насыщенности смачивающей фазы. В связи с вырождением на решении уравнений системы ее решение понимается в обобщенном смысле. Доказательство теоремы существования осуществляется в четыре этапа: регуляризация задачи, доказательство физического принципа максимума для насыщенности, построение галеркинских приближений, предельный переход по параметрам регуляризации на основе метода компенсированной компактности.

Ключевые слова: двухфазная фильтрация, закон Дарси, насыщенность, пороупругость, разрешимость.

The paper considers a mathematical model of the joint motion of two immiscible incompressible fluids in a poroelastic medium. This model is a generalization of the classical Musket-Leverett model, in which porosity is considered to be a given function of the spatial coordinate. The model under study is based on the mass conservation equations for liquids and the porous skeleton, Darcy's law for liquids, which takes into account the movement of the porous skeleton, the Laplace formula for capillary pressure, the Maxwell-type rheological equation for porosity, and the "system as a whole" equilibrium condition. In the thin layer approximation, the original problem is reduced to the successive determination of the porosity of the solid skeleton and its velocity. Then an elliptic-parabolic system is derived for the “reduced pressure” and saturation of the wetting phase. Its solution is understood in a generalized sense due to the degeneration on the solution of the equations of the system. The proof of the existence theorem is carried out in four stages: regularization of the problem, proof of the physical maximum principle for saturation, construction of Galerkin approximations, passage to the limit in regularization parameters based on the method of compensated compactness.

Key words: two-phase filtration, Darcy's law, saturation, poroelastic, solvability.

DOI: 10.14258/izvasu(2022)4-14

Постановка задачи и формулировка основного результата. В работе изучается следующая квазилинейная система составного типа:

$$\frac{\partial(s_i\phi\rho_i^0)}{\partial t}+\nabla\cdot(s_i\phi\vec{u}_i\rho_i^0)=0, \quad (1)$$

$$s_i\phi(\vec{u}_i-\vec{u}_3)=-K_0\frac{k_{0i}}{\mu_i}(\nabla p_i-\rho_i^0\vec{g}), i=1,2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial((1-\phi)\rho_3^0)}{\partial t}+\nabla\cdot((1-\phi)\vec{u}_3\rho_3^0)=0, \quad (3)$$

$$p_2-p_1=p_c(s_1), \quad (4)$$

*Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства высшего образования и науки Российской Федерации («Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механике», тема №FZMW-2020-0008).

$$\nabla \cdot \vec{u}_3 = -\frac{1}{\xi(\phi)}p_e - \beta_t(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{u}_3 \cdot \nabla p_e), \quad (5)$$

$$\nabla p_{tot} + \nabla \cdot \left(\frac{\eta}{2}(1-\phi) \left(\frac{\partial \vec{u}_3}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial \vec{u}_3}{\partial \vec{x}} \right)^* \right) \right) = = \rho_{tot}\vec{g}. \quad (6)$$

Данная система описывает движение двух несмешивающихся жидкостей (нефть – вода) в пороупругой среде [1]. Здесь $\rho_i^0, \vec{u}_i, s_i$ и p_i – соответственно истинная плотность, скорость, насыщенность и давление i-ой фазы ($i = 1$ – смачивающая фаза, $i = 2$ – несмачиващая фаза, $s_1 + s_2 = 1$, $i = 3$ – твердый деформируемой скелет), ϕ – пористость (доля объема среды, приходящейся на пустоты), $p_e \equiv p_{tot} - p_f$ – эффективное давление, $p_{tot} \equiv \phi p_f + (1-\phi)p_3$ – общее давление, $p_f \equiv p_1 s_1 + p_2 s_2$ – давление жидкой фазы, $\rho_{tot} \equiv \phi(s_1\rho_1^0 + s_2\rho_2^0) + (1-\phi)\rho_3^0$ – общая плотность; $\eta, \xi(\phi)$ и $\beta_t(\phi)$ соответственно коэффициенты сдвиговой вязкости, объемной вязкости и объемной сжимаемости среды, $\vec{g}$ – плотность массовых сил; кроме того, $K_0(\phi)$ – тензор проницаемости, μ_i – динамическая вязкость i-ой жидкости, $k_{0i}(s_i)$ – относительная фазовая проницаемость, $p_c(s_1)$ – капиллярное давление, есть заданные функции (модельные зависимости: $p_c = \bar{p}_c(1-s)/s$, $\xi(\phi) = \eta/\phi^b$, $\beta_t(\phi) = \phi^m \beta_\phi$, $k_{0i} = \bar{k}_{0i} s_i^{n_i}$, $K_0(\phi) = \phi^3 \bar{K}/(1-\phi)^2$, где $\bar{p}_c, m, b, \beta_\phi, \bar{k}_{0i}, \bar{K}, n_i$ – положительные параметры [2, 3].

Задача записана в эйлеровых координатах $\vec{x} = (x, y, z)$ и t, $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ – оператор градиента, t – время. Истинные плотности принимаются постоянными, неизвестными функциями являются 14 скалярных величин: $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, p_1, p_2, p_3, s_1, \phi$. Для их определения служат также 14 скалярных уравнений: три уравнения неразрывности (1),(3), шесть уравнений закона Дарси (2), уравнение для капиллярного скачка (4), реалогическое соотношение типа Максвела (5) и три уравнения баланса сил системы в целом (6).

Особенностью задач для сформулированной системы уравнений (1) – (6) двухфазной фильтрации жидкостей в пороупругой среде является возможное вырождение уравнений на решении (вследствие условий $k_{01}(0) = k_{02}(1) = 0$), переменная пористость ϕ, а также необходимость обоснования физического принципа максимума для s_i и ϕ вида $0 \le s_i \le 1$, $0 < \phi < 1$.

На сегодняшний день существуют единичные работы, посвященные обоснованию моделей двухфазной фильтрации в деформируемых пористых средах [4, 5]. В случае заданной пористости (недеформируемые среды) сформулированные выше уравнения есть классическая модель Маскета-Леверетта [3, 6]. Обоснованию моделей для однофазной фильтрации посвящены работы [7 – 11]. Численное исследование проводилось в [12 – 15].

Система (1) – (6) рассматривается в тонком слое $\Omega = \{(x,y)| -L \le x \le L; -H \le y \le H\}$ при фиксированном всюду значении z и при следующих дополнительных гипотезах: $\vec{u}_i = (u_i(x,y,t), 0)$, $i = 1, 2, \vec{u}_3 = (u_3(y,t), 0), \vec{g} = (g, 0, 0), K_0(\phi) = \widetilde{K}_0(\phi)\delta_{ij}$. В (1) – (6) перейдем к безразмерным переменным по правилу:

$$u_i = \frac{L}{T}\bar{u}_i, \quad x = L\bar{x}, \quad t = T\bar{t}, \quad y = H\bar{y}, \quad p_i = P\bar{p}_i,$$

$$p_e = P\bar{p}_e, \quad p_f = P\bar{p}_f, \quad p_{tot} = P\bar{p}_{tot}, \quad \eta = PT\bar{\eta},$$

$$\widetilde{K}_0 \frac{k_{0i}}{\mu_i} = \frac{L^2}{PT}\bar{K}_0 \frac{k_{0i}}{\bar{\mu}_i}, \quad \rho_i g = \frac{P}{L}\bar{\rho}_i \bar{g}, \quad \rho_{tot} g = \frac{P}{L}\bar{\rho}_{tot}\bar{g},$$

где T, L, HP – характерные время, расстояния и давление, причем $H/L = \delta$ – малый параметр. Тогда Ω есть единичный квадрат, область изменения $\bar{t}$ – единичный отрезок [0;1], а система уравнений (1) – (6) принимает следующий вид (штрихи опускается):

$$\frac{\partial s_i \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(s_i \phi u_i) = 0, \frac{\partial p_i}{\partial y} = 0, \quad (7)$$

$$s_i\phi(u_i - u_3) = -K_0(\phi)\frac{k_{0i}(s_i)}{\mu_i}(\frac{\partial p_i}{\partial x} - g\rho_i^0), i = 1, 2, \quad (8)$$

$$s_1 + s_2 = 1, \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1), \quad (9)$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((1-\phi)u_3) = 0, \quad (10)$$

$$a_1(\phi)p_e + a_2(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t} + u_3\frac{\partial p_e}{\partial x}) = 0, \frac{\partial p_{tot}}{\partial y} = 0, \quad (11)$$

$$\delta^2 \frac{\partial p_{tot}}{\partial x} + \delta \frac{\partial}{\partial x}(\eta(1-\phi))\frac{\partial u_3}{\partial y} + + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta(1-\phi)\frac{\partial u_3}{\partial y}\right) = \delta^2 \rho_{tot}^0 g. \quad (12)$$

Следует отметить, что из условия $\frac{\partial p_i}{\partial y} = 0$ и уравнения капиллярного скачка (9) вытекает, что $\frac{\partial p_c}{\partial y} = 0$, а так как p_c монотонна по s, то $\frac{\partial s}{\partial y} = 0$. С учетом этого и определения p_f также выводим, что $\frac{\partial p_f}{\partial y} = 0$. Поскольку $p_{tot} = p_f + p_e$ и $\frac{\partial p_{tot}}{\partial y} = 0$, то $\frac{\partial p_e}{\partial y} = 0$. После формального предельного перехода при $\delta \to 0$ система (7) – (12) сводится к системе для нахождения $\phi(x,y,t)$ и $u_3(y,t)$:

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((1-\phi)u_3) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta(1-\phi)\frac{\partial u_3}{\partial y}\right) = 0, \quad (14)$$

а также к следующей системе для определения $s_i(x,y,t)$, $p_i(x,t)$,$u_i(x,y,t)$ (i=1,2), $p_e(x,y,t)$ и $p_{tot}(x,y,t)$:

$$\frac{\partial s_i \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(s_i \phi u_i) = 0, \frac{\partial p_i}{\partial y} = 0, \quad (15)$$

$$s_i\phi(u_i-u_3)=-K_0(\phi)\frac{k_{0i}(s_i)}{\mu_i}(\frac{\partial p_i}{\partial x}-g\rho_i^0), i=1,2, \quad (16)$$

$$s_1+s_2=1, \quad p_2-p_1=p_c(x,s_1), \quad (17)$$

$$a_1(\phi)p_e+a_2(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t}+u_3\frac{\partial p_e}{\partial x})=0, \frac{\partial p_{tot}}{\partial y}=0, \quad (18)$$

Система (13) – (14) с краевыми и начальными условиями вида:

$$u_3(-1,t)=u_3^-(t), u_3(1,t)=u_3^+(t), \qquad \phi(x,y,0)=\phi_0(y) \quad (19)$$

будет называться задачей 1. Уравнения (15) – (18) сводятся к следующей эллиптико-параболической системе для $s=s_1$ и $p=p_1-\int_s^1\frac{k_{02}}{k(\xi)\mu_2}\frac{\partial p_c}{\partial\xi}d\xi$ [1 , 3]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_0k(s)\frac{\partial p}{\partial x}+f\right)=0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial s\phi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(s\phi u_3-K_0\frac{k_{01}}{\mu_1}\frac{\partial p}{\partial x}\right)- -\frac{\partial}{\partial x}\left(K_0a(s)\frac{\partial s}{\partial x}-f_0\right)=0, \quad (21)$$

где

$$f=K_0\left(\frac{k_{01}}{\mu_1}\rho_1g+\frac{k_{02}}{\mu_2}\rho_2g\right), \quad f_0=K_0\frac{k_{01}}{\mu_1}\rho_1g,$$

$$F=f_0-bf, v=s_1\phi u_1+s_2\phi u_2+(1-\phi)u_3,$$

$$k(s)=\frac{k_{01}}{\mu_1}+\frac{k_{02}}{\mu_2}, \quad b(s)=\frac{k_{01}}{\mu_1k(s)},$$

$$a(s)=-\frac{1}{k(s)}\frac{k_{01}}{\mu_1}\frac{k_{02}}{\mu_2}\frac{\partial p_c}{\partial s}, \quad v_1=s\phi u_1.$$

Причем

$$s(x,y,0)=s_0(x), \quad s(-1,y,0)=s^-(t),$$

$$s(1,y,0)=s^+(t), \quad p(-1,t)=p^-(t), \quad (22)$$

$$p(1,t)=p^+(t).$$

Система (20) – (21) с начально-краевыми условиями (22) будет называться задачей 2.

Рассмотрим в Ω и Ω_T ряд функциональных пространств, придерживаясь обозначений, принятых в [16]. Пусть $||\cdot||_{q,\Omega}$ – норма в пространстве Лебега $L_q(\Omega)$, $q\in[1,\infty]$. Положим для кратости $||\cdot||_q=||\cdot||_{q,\Omega}$, $||\cdot||=||\cdot||_{2,\Omega}$. Также используются пространства Гёльдера $C^\alpha(\Omega)$, $C^{k+\alpha}(\Omega)$, где k – натуральное число, а $\alpha\in(0,1]$, и пространство Соболева $W_p^l(\Omega)$, l – натуральное и $p\in[1,\infty]$ с нормами:

$$||f||_{C^\alpha(\Omega)}\equiv|f|_{\alpha,\Omega}=|f|_{0,\Omega}+H_x^\alpha(f),$$

$$|f|_{0,\Omega}=\max_{x\in\overline{\Omega}}|f(x)|,$$

$$H_x^\alpha(f)=\sup_{x_1,x_2\in\Omega}|f(x_1)-f(x_2)||x_1-x_2|^{-\alpha},$$

$$||f||_{C^{k+\alpha}(\Omega)}\equiv|f|_{k+\alpha,\Omega}=\sum_{m=0}^k||D_x^mf||_{0,\Omega}+H^\alpha(D_x^kf),$$

$$||f||_{W_p^l(\Omega)}=\sum_{m=0}^l||D_x^mf||_{p,\Omega}.$$

Для функций, определенных на Ω_T, нам потребуется пространство $L_{q,r}(\Omega_T)$ с нормой

$$||||\cdot||_{q,\Omega}||_{r,G}, G=(0,T), q,r\in[1,\infty],$$

пространство $L_r(0,T;W_p^l(\Omega))$ с нормой

$$||\cdot||_{L_r(0,T;W_p^l(\Omega))}=||||\cdot||_{W_p^l(\Omega)}||_{r,G},$$

а также $C^{k+\alpha,m+\beta}(\Omega_T)$, где k,m – натуральные и $(\alpha,\beta)\in(0,1]$ с нормой

$$||f||_{C^{k+\alpha,m+\beta}(\Omega_T)}\equiv|f|_{k+\alpha,m+\beta,\Omega_T}=$$

$$=\sum_{l=0}^k||D_x^lf||_{0,\Omega_T}+\sum_{j=1}^m||D_t^jf||_{0,\Omega_T}+$$

$$+H_x^\alpha(D_x^kf)+H_t^\beta(D_x^kf)+H_x^\alpha(D_t^mf)+H_t^\beta(D_t^mf),$$

где

$$H_x^\alpha(f(x,t))=\sup_{x_1,x_2\in\Omega}|f(x_1,t)-f(x_2,t)||x_1-x_2|^{-\alpha}$$

для всех $t\in(0,T)$,

$$H_t^\beta(f(x,t))=\sup_{t_1,t_2\in(0,T)}|f(x,t_1)-f(x,t_2)||t_1-t_2|^{-\beta}$$

для всех $x\in\Omega$. В случае $k=m$ и $\alpha=\beta$ используется обозначение $C^{k+\alpha}(\Omega_T)$.

Определение 1. Классическим решением задачи (13) – (14) называется совокупность функций ϕ и u_3, $\phi\in C^{1+\alpha}(\Omega_T)$, $u_3\in C^{2+\alpha,1+\alpha}(\Omega_T)$, удовлетворяющих условиям (13) – (14) и начально-краевым условиям (19) как непрерывные в $\bar{\Omega}_T$ функции.

Определение 2. Ограниченные измеримые функции s и p называются обобщенным решением задачи 2, если:

1) $0\le s(x,t)\le 1$ почти всюду в Ω_T;

2) $\frac{\partial p}{\partial x}\in L_2(\Omega_T), a\frac{\partial s}{\partial x}\in L_2(\Omega_T)$, где при $0\le s\le 1$ функция $a\frac{\partial s}{\partial x}$ определяется формулой:

$$a\frac{\partial s}{\partial x}=\left|\frac{dp_c}{ds}\right|\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\in L_2(\Omega_T),$$

$$u(s)=\int_0^s\frac{1}{k(\xi)}\frac{k_{01}(\xi)}{\mu_1}\frac{k_{02}(\xi)}{\mu_2}d\xi;$$

3) p удовлетворяет краевым, а s – начально-краевым условиям в следующем смысле: $u[s_0(x,t)] = u_0$;

4) для произвольный допустимых функций $\lambda(x,t)$ и $\psi(x)$ таких, что

$$\lambda(x,t) \in W_2^1(\Omega_T), \quad \psi(x) \in W_2^1(\Omega),$$

$$\lambda(-1,t) = \psi(-1) = \lambda(1,t) = \psi(1) = 0, \quad t \in [0,T],$$

почти всюду выполнены равенства:

$$L_1 \equiv -(\phi s, \lambda_t)_{\Omega_T} + \left(\vec{v}_1, \frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)_{\Omega_T} = -(\phi s, \lambda)_\Omega |_0^T,$$

$$L_2 \equiv (\vec{v}, \nabla\psi)_\Omega = 0.$$

Здесь

$$s_0(x,t) = \begin{cases} s^-(t), & x = -1, \\ s^+(t), & x = 1, \\ s^0(x), & t = 0, \end{cases}$$

$$p_0(x,t) = \begin{cases} p^-(t), & x = -1, \\ p^+(x), & x = 1. \end{cases}$$

Основным результатом данной работы являются следующие две теоремы:

Теорема 1. Если u_3^+ и $u_3^- \in C^1(0,T)$, $\phi^0(y) \in C^1(-1,1)$ и $0 < \phi^0(y) < 1$, $y \in [-1;1]$, то решение задачи 1 существует и выражается формулами:

$$\phi \equiv \phi^0(y), \quad u_3 = \frac{u_3^+ - u_3^-}{I(1)} I(y) + u_3^-,$$

$$I(y) = \int_{-1}^{y} \frac{d\xi}{1 - \phi^0(\xi)}.$$

Теорема 2. При выполнении следующих условий:

$$\tfrac{\partial p_c}{\partial s} < 0, \quad |k_{01}(s), k_{02}(s)|_{C[0,1]} \le M,$$

$$0 < M^{-1} \le [\phi, k, u_3, (K_0)] \le M, \text{если } s \in [0,1],$$

$$0 < (a, k_{01}, k_{02}), s \in (0,1);$$

$$a|_{s=0,1} = k_{01}(0) = k_{02}(1) = 0,$$

$$\left(\|\tfrac{\partial s_0}{\partial t}\|_{1,\Omega_T}; \|\tfrac{\partial s_0}{\partial x}\|_{2,\Omega_T}\right) \le M,$$

$$\left(\|p_0\|_{2,\infty,\Omega_T}; \|\tfrac{\partial p_0}{\partial x}\|_{2,\infty,\Omega_T}\right) \le M.$$

существует по крайней мере одно обобщенное решение задачи 2.

Разрешимость. Лемма 1. Пусть $u_3(y,t)$ – непрерывная функция. Если $\phi(x,y,t)$ – решение задачи

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + u_3 \frac{\partial(1-\phi)}{\partial x} = 0, \quad \phi|_{t=0} = \phi^0(y),$$

то $\phi \equiv \phi^0(y)$.

Доказательство. Непосредственной проверкой доказывается, что $\phi_0(y)$ удовлетворяет уравнению (14) и начальному условию (19).

Доказательство теоремы 1. Решение ищется в виде последовательности решений следующего семейства задач:

$$\frac{\partial(1-\phi^N)}{\partial t} + u_3^N \frac{\partial(1-\phi^N)}{\partial x} = 0, \frac{\partial}{\partial y}\left((1-\phi^{N-1})\frac{\partial u_3^N}{\partial y}\right)$$

$$N \in \mathbb{N}, \phi|_{t=0} = \phi_0(y), u_3(\pm 1, t) = u_3^\pm(t).$$

В качестве ϕ^0 берется $\phi_0(y)$, тогда на первом шаге $u_3^1(y,t) = \frac{u_3^+(t) - u_3^-(t)}{I(1)} I(y) + u_3^-(t)$, а так как $\frac{\partial u_3^1}{\partial x} = 0$, то, по лемме 1, $\phi^1 = \phi^0(y) = \phi_0(y)$. Повторяя этот процесс, получаем последовательности функций, сходимость которых легко проверить. Предельными будут функции $\phi = \phi_0(y)$ и $u_3 = (u_3^+ - u_3^-)I(y)/I(1) + u_3^-$, которые удовлетворяют (13) – (14) и начально-краевым условиям (19).

Доказательство теоремы 2 разбивается на следующие этапы: регуляризация задачи, доказательство физического принципа максимума для насыщенности, построение галеркинских приближений, предельный переход по параметрам регуляризации на основе метода компенсированной компактности. Доказательство следует работе [3] с учетом появления дополнительного слагаемого $s\phi u_3$ в уравнении для насыщенности.

Все функции вида $f(x,s)$ доопределяются следующим образом:

$$f_*(x,s) = \begin{cases} f(x,0), & s \le 0, \\ f(x,s), & 0 < s < 1, \\ f(x,1), & s \ge 1. \end{cases}$$

Кроме того, $a(s)$ заменяется на $\bar{a}(s) = a_*(s) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, а v и b осредняются по s, v и заменяются на v_n, $\frac{\partial b}{\partial s}$ на $c = (\frac{db^0}{ds})_*$, $b^0 = b_n$, где h – радиус осреднения.

После всех преобразований первое в (7) уравнение принимает вид:

$$\left(K_0 \bar{a}(s)\tfrac{\partial s}{\partial x} + F, \tfrac{\partial \lambda}{\partial x}\right)_{\Omega_t} - \left(c(s)(u_3 - v_h)\tfrac{\partial s}{\partial x}, \lambda\right)_{\Omega_t} -$$

$$-(\phi s, \lambda_t)_{\Omega_t} + \left(\tfrac{\partial s}{\partial x}\phi u_3, \lambda\right)_{\Omega_t} = -(\phi s, \lambda)_\Omega |_0^t.$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы 2 и s и p – обобщенное решение задачи 2. Тогда почти всюду в $\Omega_t \quad 0 \le s(x,t) \le 1$.

Доказательство. Введем срезающую функцию $\bar{s} = max\{s(x,t) - 1, 0\}$. Тогда верны следующие свойства: $\frac{\partial \bar{s}}{\partial x} \in L_2(\Omega_t)$, $\bar{s}(-1,t) = \bar{s}(1,t) = \bar{s}(x,0) = 0$, и почти всюду выполнено равенство:

$$(\phi s, \bar{s}_t)_{\Omega_t} = (\phi s, \bar{s})_\Omega|_0^t - \frac{1}{2}\|\sqrt{\phi}\bar{s}(t)\|^2_{\Omega,2}, \quad F(\bar{s}, x) = 0.$$

Так как $\bar{s}$ – допустимая функция, ее можно подставить в (8). После этой подстановки и некоторых преобразований (8) примет следующий вид:

$$\tfrac{1}{2}\|\sqrt{\phi}\bar{s}(t)\|^2_{\Omega,2} - \left((c(s)(u_3 - v_h) - \phi u_3)\tfrac{\partial s}{\partial x}, \bar{s}\right)_{\Omega_t} +$$

$$+ \left(K_0 \bar{a}(s)\tfrac{\partial s}{\partial x}, \tfrac{\partial \bar{s}}{\partial x}\right)_{\Omega_t} = 0,$$

из которого следует неравенство:

$$y(t) = \|\sqrt{\phi}s\|_\Omega \le C\int_0^t y(\tau)d\tau, \quad y(0) = 0.$$

Отсюда следует, что $\bar{s} = 0$ или, что то же самое, $s \le 1$ почти всюду.

Аналогично, вводя $\underline{s} = max(-s, 0)$, доказывается, что $\underline{s} \equiv 0$ и $0 < s < 1$ почти всюду.

После доказательства леммы 2 решение задачи находится в виде галеркинских приближений. Затем осуществляется предельных переход при h и $\varepsilon \to 0$. Предельные функции дают решение задачи 2. Теорема доказана.

Заключение. В работе доказана теорема существования обобщенного решения одной задачи фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в тонком пороупругом слое.

Библиографический список

1. Папин А.А., Подладчиков Ю.Ю. Изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде // Известия Алт. гос. ун-та. 2015. № 1-2. DOI: 10.14258/izvasu(2015) 1.2-24

2. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelasticrock // Geodin. Acta. 1998. Vol. 11.

3. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск. 1983.

4. Сибин А.Н. Математическая модель поршневого вытеснения жидкости в упругой пористой среде // Сборник трудов всероссийской конференции по математике «МАК-2016». Материалы молодежной прикладной IT школы «Математическое моделирование в экологии, агроэкологии и природопользовании». 2016.

5. Гилев П.В., Папин А.А. Исследование задачи двухфазной фильтрации в пороупругой среде в приближении двумерной ячейки Хеле-Шоу // Сборник тезисов евразийской конференции по прикладной математике. Новосибирск, 2021.

6. Антонцев С.Н., Папин А.А. Приближенные методы решения задач двухфазной фильтрации // Доклады Академии наук СССР. 1979. Т. 247. № 3.

7. Simpson M., Spiegelman M. Weinstein M.I. Degenerate Dispersive Equations Arising in the Study of Magma Dynamics // Nonlinearity. 2007. Vol. 20 (1). DOI: 10.1088/0951-7715/20/1/003.

8. Tokareva M.A. Localization of solutions of the equations of filtration in poroelastic medium // Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics. 2015. Т. 8. № 4. DOI: 10.17516/1997-1397-2015-8-4-467-477.

9. Tokareva M.A. Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic medium // Journal of Physics: Conference Series. 2016. Т. 722. № 1. DOI: 10.1088/1742-6596/722/1/012037

10. Токарева М.А., Папин А.А. Глобальная разрешимость системы уравнений одномерного движения вязкой жидкости в деформируемой вязкой пористой среде // Сибирский журнал индустриальной математики. 2019. Т. 22. № 2 (78). DOI: 10.1134/S1990478919020169.

11. Токарева М.А., Вирц Р.А., Ларионова В.Н. Математическая модель движения жидкости в пороупругом льду с учетом фазовых переходов и движения льда // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. 2021. №. 7. DOI: 10.17516/1997-1397-2020-13-6-763-773.

12. Saad A.S., Saad B. Saad M. Numerical Study of Compositional Compressible Degenerate Two-Phase Flow In Saturated-Unsaturated Heterogeneous Porous Media // Comput. Math. Appl. 2016. Vol. 71. № 2.

13. Morency C., Huismans R.S., Beaumont C. Fullsack P. A Numerical Model for Coupled Fluid Flow and Matrix Deformation with Applications to Disequilibrium Compaction and Delta Stability // J. Geophys. Res. 2007. B10407. DOI: 10. 1029/2006JB004701.

14. Chengwei Z., Chong P., Wei W., Chun W. A multi-layer SPH method for generic water–soil dynamic coupling problems. Part I: Revisit, theory, and validation // Computer Methods in Applied

Mechanics and Engineering 396 (2/3/4) 2022. DOI: 10.1016/j.cma.2022.115106.

15. Бочаров О.Б., Рудяк В.Я., Серяков А.В. Простейшие модели деформирования пороупругой среды, насыщенной флюидами // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2014. № 2.

16. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.