УДК 519.67

О реализации алгоритма вычисления функционалов Минковского трехмерного цифрового пространства*

М.Е. Гнедко, Д.Н. Оскорбин

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

On the Implementation of the Algorithm for Calculating the Functionals of Minkowski Three-Dimensional Digital Space

M.E. Gnedko, D.N. Oskorbin

Altai State University (Barnaul, Russia)

Статья посвящена реализации алгоритма вычисления функционалов Минковского множества в трехмерном цифровом пространстве на основе расчетов значений этих функционалов у различных типов окрестностей узлов, на которые можно разбить множество в цифровом пространстве. Понятие функционалов Минковского появилось в теории выпуклых множеств в n-мерном евклидовом пространстве, они представляют собой коэффициенты в разложении функции объема ε-окрестности выпуклого множества по степеням ε. Впоследствии оказалось, что понятие функционалов можно обобщить на случай множеств с особенностями, в том числе на случай множества в цифровом пространстве. Функционалы Минковского цифрового изображения, представляющего объединение кубических вокселей, пересекающихся по ребрам и вершинам, являются статистическими мерами, основанными на характеристике Эйлера-Пуанкаре n-мерного пространства, показывают чувствительность к морфологии неупорядоченных структур, что подтверждают прикладные исследования. Они используются при вычислении мер с плотностью для ряда неупорядоченных микроструктурных моделей; моделей на основе частиц, аморфных микроструктур, ячеистых и пеноподобных структур. Результаты расчетов для различных микроструктур демонстрируют ряд качественных характеристик.

В работе изучаются вопросы реализации алгоритма нахождения функционалов Минковского для множества в трехмерном цифровом пространстве.

Ключевые слова: воксель, цифровое пространство, тип связности, тип окрестности, эйлерова характеристика, локальные коэффициенты, функционал Минковского.

DOI: 10.14258/izvasu(2022)4-15

The paper is devoted to the implementation of an algorithm for calculating the functionals of the Minkowski set in a three-dimensional digital space. The algorithm is based on the calculation of the values of these functionals for various types of node neighborhoods into which a set in a digital space can be divided. The concept of Minkowski functionals appeared in the theory of convex sets in n-dimensional Euclidean space; they are coefficients in the expansion of the volume function ε of a neighborhood of a convex set in powers of ε. Subsequently, it turned out that the concept of functionals can be generalized to the case of sets with singularities, including the case of a set in a digital space. Minkowski functionals of a digital image representing a union cubic voxel intersecting along edges and vertices are statistical measures based on the Euler-Poincaré characteristic of n-dimensional space, show sensitivity to the morphology of disordered structures, which is confirmed by applied research. They are used in calculating density measures for a number of unordered microstructural models; particle-based models, amorphous microstructures, cellular and foamlike structures. The results of calculations for various microstructures demonstrate a number of qualitative characteristics.

The paper studies the implementation of the algorithm for finding the Minkowski functionals for a set in a three-dimensional digital space.

Key words: voxel, digital space, connection type, neighborhood type, Euler characteristic, local coefficients, Minkowski functional.

Введение. В изучении и моделировании пористых сред полезным инструментом являются функционалы Минковского. Они могут быть использованы для эффективной оценки морфологии материалов [1–9].

Вычислительная быстрота алгоритмов вычисления функционалов Минковского цифровых

*Исследование выполнено в рамках реализации программы поддержки научно-педагогических работников ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет».

пространств делает их эффективным инструментом. Возможны алгоритмы, линейные по числу пикселей или вокселей области рассматриваемого цифрового изображения в зависимости от пространства. Многие алгоритмы возможны для двумерных и трехмерных цифровых изображений, вычисления в которых сводятся к проходу по целочисленным вершинам и суммированию с весами, которые заранее посчитаны.

1. Основные определения и утверждения. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z)|x,y,z \in \mathbb{R}\}$. Семейства плоскостей $x = m, y = n, z = k, m, n, k \in \mathbb{Z}$ делит $\mathbb{R}^3$ на кубы. Назовем *элементарным кубом* с центром в точке $p = (m + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ множество

$$C_p = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}| m \le x \le m+1, \\ n \le y \le n+1, k \le z \le k+1\}. \quad (1)$$

Элементарные кубы чаще всего называют *вокселями*. Они являются трехмерными аналогами пикселей, которые, в свою очередь, являются элементарными квадратами [8].

Элементарные квадраты можно разделить на множества элементарных *граней*, *ребер* и *вершин*.

При определении, какие элементарные кубы являются соседними друг с другом, необходимо наделить пространство индуцированной топологией пространства или топологией дизъюнктного объединения. В трехмерном случае есть два основных способа, так называемые 26-связность и 6-связность [7, 8]. При рассмотрении 26-связности подразумевается, что у каждого вокселя есть ровно 26 соседей, в центр каждого из которых ведет непрерывный путь из центра исходного вокселя, не выходящий за пределы рассматриваемых двух соседей. Данный путь можно построить, связывая кубы между собой через грани, ребра и вершины. Соответственно, для случая 6-связности рассматривается соседство только по граням. Следовательно, максимальное число соседей у любого вокселя будет равняться 6.

Наряду с разбиением на элементарные кубы, рассмотрим области в $\mathbb{R}^3$ следующего вида:

$$U_{i,j,k} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 || x - i| < \frac{1}{2}, \\ |y - j| < \frac{1}{2}, |z - k| < \frac{1}{2}\}, \quad (2)$$

для $i, j, z \in \mathbb{Z}$. Элементарный куб с центром $p_i \in K$ пересекается с $U_{i,j,k}$ тогда, и только тогда, когда $p_i \in U_{i,j,k}$ одна из угловых вершин $U_{i,j,k}$. Таким образом, $U_{i,j,k}$ моделирует окрестность целочисленной точки и структура этой окрестности зависит от того, какие угловые вершины $U_{i,j,k}$ лежат в K. Оказывается удобным каждой окрестности $U_{i,j,k}$ сопоставить число z, которое кодирует комбинаторный тип окрестности, присутствие узла в одном из 8 октантов определяет разряды 8-значного числа в двоичной системе исчисления и $z(U_{i,j,k})$ будет пробегать от 0 до 255:

$$\begin{aligned} z(U_{i,j,k}) = {} & 2^7 I_K(i+1/2, j+1/2, k+1/2) + \\ & + 2^6 I_K(i-1/2, j+1/2, k+1/2) + \\ & + 2^5 I_K(i+1/2, j-1/2, k+1/2) + \\ & + 2^4 I_K(i-1/2, j-1/2, k+1/2) + \\ & + 2^3 I_K(i+1/2, j+1/2, k-1/2) + \\ & + 2^2 I_K(i-1/2, j+1/2, k-1/2) + \\ & + 2 I_K(i+1/2, j-1/2, k-1/2) + \\ & + I_K(i-1/2, j-1/2, k-1/2), \end{aligned} \quad (3)$$

где $I_K(p) = 1$, если $p \in K$ и $I_K(p) = 0$ в ином случае, см. подробнее в [7, 8].

Замечание. При рассмотрении 256 возможных типов окрестностей с точностью до движения остается лишь 23 типа. Количество типов можно вычислять, используя теорему Пойа о цикловом индексе группы. Цикловой индекс группы собственных вращений куба, действующий на множестве его вершин, есть [10]

$$P_G = \frac{1}{24}(z_1^8 + 8z_1^2 z_3^2 + 9z_2^4 + 6z_4^2). \quad (4)$$

Делая замену в полученном числовом индексе $z_i^j = (x_i + y_i)^j$, путем суммирования коэффициентов при x_i и y_i получаем, что количество возможных типов будет равно 23. Закодированные бинарным образом типы окрестности показаны в таблице 1.

Конечное объединение вокселей трехмерного цифрового пространства можно превратить в симплициальный комплекс [8].

Определение. Положим, $c_p = dim(C_p(K))$– число p-мерных симплексов симплициального комплекса K. Число

$$\chi(X) = c_0 - c_1 + c_2 - ... + (-1)^n c_n \quad (5)$$

называется *эйлеровой характеристикой* комплекса K.

Лемма [8]. В случае двумерного или трехмерного цифрового пространства $(n = 2, 3)$ имеет место формула позволяющая вычислять эйлерову характеристику целочисленной точки:

$$\chi_{i,j,k}^l = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{(c_m)_{i,j,k}}{2^m}, \quad (6)$$

где $(c_0)_{i,j,k}$, $(c_1)_{i,j,k}$, $(c_2)_{i,j,k}$, $(c_3)_{i,j,k}$ – число вершин (всегда равно 1), ребер, квадратов и кубов, входящих в данную целочисленную вершину (i, j, k), посчитанные с учетом типа связности l.

Рассмотрим функционалы Минковского оцифрованных представлений сложных сред. Рассмотрим двухкомпонентную среду, заполняющую кубический объем $V = L^n$. Оцифрованный набор

Таблица 1

Типы окрестности $z(U_{i,j,k})$ трехмерного цифрового изображения

№ ок-ти	Типы окрестности
0	[[0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0]]
1	[[0, 0, 0, 0], [1, 0, 0, 0]]
2	[[0, 0, 0, 0], [1, 1, 0, 0]]
3	[[0, 0, 0, 0], [1, 0, 1, 0]]
4	[[1, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0]]
5	[[0, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 0]]
6	[[1, 0, 0, 0], [0, 1, 1, 0]]
7	[[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 1]]
8	[[0, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 1]]
9	[[1, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 0]]
10	[[1, 0, 0, 0], [1, 0, 1, 1]]
11	[[1, 0, 0, 0], [1, 1, 0, 1]]
12	[[1, 0, 0, 0], [0, 1, 1, 1]]
13	[[1, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 1]]
14	[[1, 0, 1, 0], [0, 1, 0, 1]]
15	[[1, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 1]]
16	[[1, 1, 0, 0], [0, 1, 1, 1]]
17	[[1, 0, 1, 0], [0, 1, 1, 1]]
18	[[1, 1, 0, 0], [1, 1, 1, 1]]
19	[[1, 1, 1, 0], [1, 0, 1, 1]]
20	[[1, 0, 1, 0], [1, 1, 1, 1]]
21	[[1, 1, 1, 0], [1, 1, 1, 1]]
22	[[1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1]]

$\mathcal{Q} = \bigcup_i Q_i$ компонент может быть описан объединением конечного числа вокселей Q_i. Рассмотрим кольцо $\mathcal{R}$, состоящее их всех выпуклых компактов A евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, а также их конечных объединений. Оцифрованное пространственное множество $\mathcal{Q}$, очевидно, входит в $\mathcal{R}$.

Эйлерова характеристика χ вводится как аддитивный функционал на $\mathcal{R}$. Определим $\chi(A)$ на выпуклых множествах: $\chi(A) = 1$, если A непусто, и $\chi(A) = 0$, если A пусто. Распространим χ на кольцо $\mathcal{R}$, полагая

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B). \quad (7)$$

Нетрудно проверить, что так определенный функционал χ совпадет с эйлеровой характеристикой, определяемой в топологическом смысле. Тогда функционалы Минковского на $\mathcal{R}$ можно определить через

$$W_p(A) = \quad \chi(A \cap E_m)\mathrm{d}\mu(E_m). \quad (8)$$

Здесь E_m — m-мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}\mu(E_m)$ обозначает свою кинематическую плотность, нормализованную таким образом, что для n-мерного шара радиуса $r, W_m(B_n(r)) = \omega_n r^{n-m}; \omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma(1 + n/2)$ — объем единичного шара. Для множеств $\mathcal{Q}$, т. е. объединений вокселей Q_i удобно перенормировать функционалы Минковского, установив

$$V_m(\mathcal{Q}) = \frac{W_m(\mathcal{Q})}{\omega_m} \quad (9)$$

так что $V_m(Q_i) = 1$ для одного вокселя Q_i.

При таком определении функционалы Минковского, найденные для выпуклого множества в трехмерном евклидовом пространстве, совпадут с объемом, площадью, интегральной средней кривизной и эйлеровой характеристикой, возникающими в формуле Штейнера (см. подробнее [7, 8]):

$$V(X_\varepsilon) = V(X) + A(X)\varepsilon + H(X)\varepsilon^2 + \frac{4\pi}{3}\chi(X)\varepsilon^3, \quad (10)$$

где $V_0 = V(X)$ – объем, $V_1 = \frac{1}{6}A(X)$ – площадь поверхности, $V_2 = \frac{1}{3\pi}H(X)$ – интегральная средняя кривизна, $V_3 = \chi(X)$ – эйлерова характеристика.

Из леммы вытекает, что функционалы Минковского элементарной окрестности узла (i, j, k) трехмерного цифрового пространства могут быть найдены следующим образом [8]:

1. V_0 — количество октантов, входящих в целочисленную точку, т. е. $V_0 = c_3$;
2. V_1 — количество внешних граней целочисленной точки, т. е. $V_1 = c_2$;
3. V_2 — сумма вкладов ребер окрестности, т. е. вклад одномерных ребер, равный $\frac{\pi}{4}$, двойственных ему ребер, равный — $\frac{\pi}{4}$, и вклад, равный 0, по внешней поверхности;
4. V_3 — эйлерова характеристика, т. е. $V_3 = 1 - \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} - \frac{c_3}{8}$.

2. Описание алгоритма. В ходе исследования был получен следующий алгоритм классификации типов окрестности трехмерного пространства путем перехода от двумерного к трехмерному. Основа алгоритма была взята из работы [11].

1. На остове типов окрестности $\mathbb{R}^2$ составляем всевозможные вариации типов окрестности вокселей трехмерного пространства с точностью до поворота.
2. Для каждого полученного ранее вокселя рассчитываются его коэффициенты V_0, V_1 и V_2.
3. Производим удаление повторяющихся вокселей, основываясь на локальных характеристиках и поворотах вокселя. Упорядочиваем полученный список.
4. Рассчитываем эйлерову характеристику для полученных типов окрестности.

3. Псевдокод алгоритма. По выше упомянутому алгоритму был создан программный продукт на языке Python 3, позволяющий классифицировать типы окрестностей вокселей с их локальными коэффициентами и эйлеровой характеристикой. Псевдокод основных функций работы программы с учетом языка Python продемонстрированы в алгоритмах 1 и 2.

Algorithm 1. Функция, удаляющая повторяющиеся типы окрестности.

U – массив с типами окрестностей и локальными коэффициентами;
V – массив с уникальными типами окрестности.

```
function shorting(U)
    V ← U[0]
    del U[0]
    i ← 0
    while true do
        for j in U do:
            if j == V[i] then:
                del U[i]
            end if
            i ← i + 1
        end for
        V add U[0]
        del U[0]
        if len(U) == 0 then
            break
        end if
    end while
    sort V
    return V
end function
```

Algorithm 2. Функция, генерирующая все возможные типы окрестности.

$voxel$ — массив типов окрестности, созданный путем соединения типов окрестности предыдущей размерности

```
function filling( )
    while true do
        voxel
        coefficients add voxel[localcoefficients]
        for i in range(0, 4) do
            newvoxel ← voxel[0]
            newvoxel add [voxel[1][3],
            voxel[1][0], voxel[1][1], voxel[1][2]]
            coefficients add newvoxel[local
            coefficients]
            voxel ← newvoxel
            return shorting(coefficients)
        end for
    end while
end function
```

4. Результат работы алгоритма. В приведенной ниже таблице 2 показаны полученные функционалы Минковского в формуле объема $V(X_\varepsilon)$ как функции от ε для пространства $\mathbb{R}^3$.

При рассмотрении окрестности $U_{i,j,k}$ целочисленной точки $(i,\ j,\ k)$ величина V_0 определяется как одна восьмая от количества вокселей, имеющих точку $(i,\ j,\ k)$ в качестве угловой вершины; величину V_1 как одну двадцать четвертую от количества квадратов, имеющих точку в качестве угловой вершины; величину V_2 половину от суммарного вклада ребер в $H(X)$, деленного на 3π. В случае эйлеровой характеристики используется формула (6). χ определяется аналогично величине V_0 [7, 8].

Заключение. В работе было рассмотрено трехмерное цифровое пространство и получены для него возможные типы окрестности целочисленной точки, их локальные коэффициенты и эйлерова характеристика зависящие от типа связности. Полученный алгоритм имеет сложность $O(MN)$. Также его можно адаптировать для более высоких размерностей, в частности для размерности 4. В работе [9] отмечено, что подобная классификация для четырехмерной размерности, используемая в подобном алгоритме, не является тривиальной задачей, которая усложнена невозможностью визуализации цифрового изображения.

Таблица 2

Локальные коэффициенты функционалов Минковского V_0, V_1, V_2^{26}, V_2^6 и эйлерова характеристика χ^{26}, χ^6 в зависимости от типа окрестности $z(U_{i,j,k})$

№ ок-ти	$8V_0$	$24V_1$	$24V_2^{26}$	$24V_2^6$	$8\chi^{26}$	$8\chi^6$
0	0	0	0	0	0	0
1	1	3	3	3	1	1
2	2	4	2	2	0	0
3	2	6	2	6	-2	2
4	2	6	6	6	-6	2
5	3	5	1	1	-1	-1
6	3	7	1	5	-3	1
7	3	9	-3	9	-1	3
8	4	4	0	0	0	0
9	4	6	0	0	-2	-2
10	4	6	0	0	-2	-2
11	4	6	0	0	-2	-2
12	4	8	-4	4	0	0
13	4	8	-4	4	0	0
14	4	12	-12	12	4	4
15	5	5	-1	-1	-1	-1
16	5	7	-5	-1	1	-3
17	5	9	-9	3	3	-1
18	6	4	-2	-2	0	0
19	6	6	-6	-6	2	-6
20	6	6	-6	-2	2	-2
21	7	3	-3	-3	1	1
22	8	0	0	0	0	0

Библиографический список

1. Edelsdrunner H. A Short Course in Computational Geometry and Topology. // Heidelberg: Springer, 2014.

2. Edelsdrunner H., Harer J. Computational Topology. An Introduction // Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 2010.

3. Fredrich J., Greaves K., Martin J. Int. J. Rock Mech. Min. // Sci. Geomech. Abstr. 1993.

4. Scheidegger A. The Physics of Flow through Porous Media // University of Toronto Press, Toronto, 1974.

5. Kong T.Y. Digital Topology: Introduction and Survey // Computer Vision, Graphics and Image Processing. 1989. Vol. 48.

6. Arns C.H., Knackstedt M.A., Mecke K.R. Characterisation of irregular spatial structures by parallel sets and integral geometric measures // Colloids and Surfaces A. 2015. T. 24.

7. Arns C.H., Knackstedt M.A., Pinczewski W.V., Mecke K.R. Euler – Poincare characteristics of classes of disordered media // Cambridge University Press. 2004.

8. Базайкин Я.В. Лекции по вычислительной топологии : учебно-метод. пособие. Новосибирск, 2017.

9. Богоявленская О.А. О вычислении функционалов Минковского четырехмерных цифровых изображений // Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М.В. Ломоносова, 2020.

10. Чашкин А.В. Дискретная математика : учебник для учреждений высш. проф. образования. М., 2012.

11. Бондарь А.В., Гнедко М.Е., Оскорбин Д.Н. О задаче вычисления функционалов Минковского цифровых пространств малых размерностей // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. 2022. № 7.