

3. Berger M. Les varietes riemannienes homogenes normales a courbure strictement positive // Ann. Sc. Norm. Pisa. 1961. V. 15.

4. Wallach, N.R. Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature // Ann. Math. 1972. V. 2(96). P. 277–295.

5. Bérard Bergery, L. Les variétés riemanniennes homogènes simplement connexes de dimension impaire à courbure strictement positive // J. Math. Pures Appl. // 1976. V. 55. P. 47–67.

6. Алексеевский Д.В. Однородные римановы пространства отрицательной кривизны // Матем. сб. 1975. Т. 96(138), № 1. С. 93–117.

7. Bérard Bergery, L.: Sur la courbure des métriques riemanniennes invariantes des groupes de Lie et des espaces homogènes // Ann. Sci. École Norm. Sup. 1978. V. (4)11, P. 543–576.

8. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. – 1976. – V. 21. – P. 293–329.

9. Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. Геометрия. – 2006. – Т. 37. – С. 1–78.

10. Родионов Е.Д., Славский В.В., Хромова О.П. О секционной кривизне метрических связностей с векторным кручением // Известия АлтГУ. – 2020. – №1(111). – С. 124–127.

**УДК 517.9 + 51-76**

## **Эффективные характеристики механической системы «щетиновая структура – вязкая жидкость»**

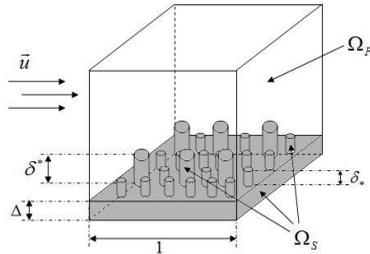
**С.А. Саженок<sup>1</sup>, Е.В. Саженкова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*ИГиЛ СО РАН, Новосибирск, АлтГУ, Барнаул;*

<sup>2</sup>*НГУЭУ, Новосибирск*

**1. Введение.** В настоящей заметке излагаются новые результаты о свойствах эффективных механических характеристик усредненной модели взаимодействия слабо сжимаемой вязкой жидкости (или газа) и погруженной в нее двухуровневой щетиновой структуры. Эта модель была построена авторами ранее (см. [1]–[3]) с помощью методов теории гомогенизации, исходя из базовых уравнений микроструктуры. Она естественным образом обобщает хорошо известную систему К.-Х. Хоффмана, Н.Д. Боткина и В.Н. Старовойтова [4], сконструированную в случае одноуровневой структуры, и в приложениях может быть использована, например, в описании аэродинамики в окрестности листа растения, в моделировании поверхности эпителия кровеносных сосудов

и при проектировании биотехнологических устройств, работающих в жидкостях.



**2. Описание микроструктуры.** Базовая модель микроструктуры формулируется в безразмерном виде следующим образом.

Рисунок 1 – Щетинистая структура, погруженная в жидкость.

Упругая пластина и жидкость заполняют куб  $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}: 0 < x_1, x_2, x_3 < 1\}$ . Пластина занимает слой  $\Omega_{pl} = \{\mathbf{x} \in \Omega: 0 < x_3 < \Delta\}$  ( $\Delta \ll 1$ ) на дне куба. Щетинки моделируются в виде упругих цилиндров, вообще говоря, не обязательно круговых, достаточно часто периодически расположенных на гладкой поверхности пластины. Имеются цилиндры двух размеров: цилиндры меньшей высоты и меньшего диаметра расположены на порядок или несколько порядков чаще, чем цилиндры большей высоты и большего диаметра. Высоты цилиндров фиксированы и принимают два постоянных значения  $\delta_*$  и  $\delta^*$ , ( $\delta_* < \delta^*$ ,  $\Delta + \delta_* < 1$ ). Расстояние между двумя соседними большими цилиндрами есть  $O(\varepsilon)$ , а соседними маленькими –  $O(\varepsilon^2)$ , где  $\varepsilon > 0$  – малый параметр.

Движение газа описывается классическими нестационарными уравнениями Стокса, а движение упругой компоненты – классическими нестационарными уравнениями Ламе. На поверхности соприкосновения выполняются условия непрерывности скоростей и нормальных напряжений. Полная точная постановка модели на макроскопическом масштабе сформулирована в [1,2], следуя изложению в [4, п. 2.1].

**3. Усредненная модель механической системы «щетинистая структура – вязкая жидкость» в безразмерном виде.** Процедура гомогенизации исходной модели при  $\varepsilon \searrow 0$  проведена и строго обоснована в [1]. В результате асимптотической декомпозиции, заключающейся в разделении микро-, мезо- и макроскопического масштабов в предельных трехмасштабных уравнениях, скон-

струирована нижеследующая эффективная макроскопическая модель изучаемой механической системы [2,3].

**Модель HBS.** В пространственно-временной области  $\Pi_T = \Omega \times (0, T)$ , где  $T = const > 0$  – произвольно заданный момент времени, требуется найти распределение макроскопических скоростей  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , удовлетворяющее следующим соотношениям.

• В  $\Omega_{fl} = \{\mathbf{x} \in \Omega : \Delta + \delta^* < x_3 < 1\}$  течение жидкости подчиняется системе Стокса:

$$\alpha_\tau \rho_F \partial_t \mathbf{u} - \operatorname{div}_x (\mathbf{P} : \mathbf{D}_x(\mathbf{u})) - \alpha_\gamma^{-1} \nabla_x \operatorname{div}_x J_t \mathbf{u} = -\nabla_x p^0 + \alpha_F \rho_F \mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\mathbf{P} : \mathbf{D}_x(\mathbf{u}) = (\alpha_\lambda \operatorname{div}_x \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\alpha_\mu \mathbf{D}_x(\mathbf{u}). \quad (2)$$

Здесь и далее  $\alpha_\gamma$ ,  $\alpha_\lambda$ ,  $\alpha_\mu$ ,  $\alpha_\tau$ ,  $\alpha_F$  – положительные заданные постоянные безразмерные характеристики жидкости (сжимаемость, объемная и сдвиговая вязкости и т.д.),  $\mathbf{P}$  – тензор вязких напряжений,  $\rho_F$  – средняя постоянная плотность жидкости,  $p^0$  – заданное начальное распределение давлений,  $\mathbf{f}$  – заданный вектор внешних распределенных сил,  $\mathbf{I}$  – единичная матрица и  $J_t$  – оператор Вольтерра (оператор взятия первообразной), определенный по формуле

$$(J_t \phi)(t) = \int_0^t \phi(t') dt' \quad \forall \phi \in L^1(0, T).$$

• В слое  $\Omega_{\delta^*} = \{\mathbf{x} \in \Omega : \Delta + \delta_* < x_3 < \Delta + \delta^*\}$  совместное движение больших упругих щетинок и жидкости подчиняется системе уравнений линейной вязкоупругости с памятью формы:

$$\begin{aligned} \alpha_\tau \rho_\sigma \partial_t \mathbf{u} - \operatorname{div}_x (\mathbf{P}^\sigma : \mathbf{D}_x(\mathbf{u})) - \operatorname{div}_x (\mathbf{G}^\sigma : \mathbf{D}_x(J_t \mathbf{u})) \\ - \operatorname{div}_x \int_0^t \mathbf{R}^\sigma(t - \tau) : \mathbf{D}_x(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)) d\tau = \operatorname{div}_x \mathbf{S}_0^\sigma + \alpha_F \rho_\sigma \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\rho_\sigma$  – средняя постоянная плотность вязкоупругой среды в  $\Omega_{\delta^*}$ , тензоры  $\mathbf{P}^\sigma$ ,  $\mathbf{G}^\sigma$ ,  $\mathbf{R}^\sigma(t)$  – это постоянные эффективные тензоры мгновенных вязких напряжений и упругости и зависящий от  $t$  тензор вязкоупругих релаксаций в  $\Omega_{\delta^*}$ , соответственно, и  $\mathbf{S}_0^\sigma(\mathbf{x}, t)$  – заданный дополнительный тензор частичных напряжений, возникающих вследствие начальных взаимодействий в  $\Omega_{\delta^*}$ .

• В слое  $\Omega_{\delta_*} = \{\mathbf{x} \in \Omega : \Delta < x_3 < \Delta + \delta_*\}$  совместное движение больших и маленьких упругих щетинок и жидкости подчиняется системе уравнений линейной вязкоупругости с памятью формы:

$$\alpha_\tau \rho_\theta \partial_t \mathbf{u} - \operatorname{div}_x (\mathbf{P}^\theta : \mathbf{D}_x(\mathbf{u})) - \operatorname{div}_x (\mathbf{G}^\theta : \mathbf{D}_x(J_t \mathbf{u})) \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
& - \operatorname{div}_x \int_0^t \mathbf{R}_1^\theta(t - \tau) : \mathbf{D}_x(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)) d\tau \\
& - \operatorname{div}_x \int_0^t \int_0^{\tau'} \mathbf{R}_2^\theta(t - \tau', \tau' - \tau) : \mathbf{D}_x(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)) d\tau d\tau' = \operatorname{div}_x \mathbf{S}_0^\theta + \alpha_F \rho_\theta \mathbf{f}.
\end{aligned}$$

Здесь  $\rho_\theta$  – средняя постоянная плотность вязкоупругой среды в  $\Omega_{\delta_*}$ , тензоры  $\mathbf{P}^\theta$ ,  $\mathbf{G}^\theta$  и  $\mathbf{R}_1^\theta(t)$  – это постоянные эффективные тензоры мгновенных вязких напряжений и упругости и зависящий от  $t$  первый тензор вязкоупругих релаксаций в  $\Omega_{\delta_*}$ , соответственно,  $\mathbf{R}_2^\theta(t_1, t_2) = \sum_{i,j=1}^6 \mathbf{Q}_1^{ij}(t_1) \otimes \mathbf{Q}_2^{ij}(t_2)$  – второй тензор вязкоупругих релаксаций в  $\Omega_{\delta_*}$  и  $\mathbf{S}_0^\theta(\mathbf{x}, t)$  – заданный дополнительный тензор частичных напряжений, возникающих вследствие начальных взаимодействий в  $\Omega_{\delta_*}$ .

• В  $\Omega_{pl}$  движение частиц пластины подчиняется системе уравнений Ламе теории линейной упругости:

$$\alpha_\tau \rho_S \partial_t \mathbf{u} - \operatorname{div}_x(\mathbf{G} : \mathbf{D}_x(\mathbf{J}_t \mathbf{u})) = \operatorname{div}_x(\mathbf{G} : \mathbf{D}_x(\mathbf{v}^0)) + \alpha_F \rho_S \mathbf{f} \quad (5)$$

Здесь  $\rho_S$  – средняя постоянная плотность упругой пластины,  $\mathbf{G}$  – заданный симметричный положительно определенный тензор упругости четвертого порядка,  $\mathbf{v}^0$  – начальное смещение в  $\Omega_{pl}$ .

• Система (1)-(5) дополняется условиями непрерывности полей скоростей и нормальных напряжений на поверхностях раздела слоев  $\{x_3 = \Delta\}$ ,  $\{x_3 = \Delta + \delta_*\}$  и  $\{x_3 = \Delta + \delta^*\}$ , краевыми условиями для  $\mathbf{u}$  на внешней границе области  $\Omega$  и начальными данными для  $\mathbf{u}$ .

**4. Свойства эффективных характеристик.** Тензоры четвертого порядка  $\mathbf{P}^\sigma$ ,  $\mathbf{G}^\sigma$ ,  $\mathbf{R}^\sigma(t)$ ,  $\mathbf{P}^\theta$ ,  $\mathbf{G}^\theta$ ,  $\mathbf{R}_1^\theta(t)$ ,  $\mathbf{R}_2^\theta(t_1, t_2)$  и матрицы  $\mathbf{S}_0^\sigma(\mathbf{x}, t)$  и  $\mathbf{S}_0^\theta(\mathbf{x}, t)$  являются усредненными эффективными характеристиками сплошных сред в слоях  $\Omega_{\delta^*}$  и  $\Omega_{\delta_*}$ . Они находятся в процессе выполнения процедур гомогенизации и асимптотической декомпозиции, полностью определяются данными микроструктуры (физическими характеристиками и геометрическими свойствами) и в постановке модели HBS являются заданными. Для приложений важным является вопрос о выявлении основных свойств этих тензоров, типа симметричности и положительности, которые были бы всеобщими, то есть не привязанными к конкретной микроструктуре. Строго говоря, именно такие свойства позволяют идентифицировать предельные уравнения (3) и (4) как уравнения динамики линейных вязкоупругих тел с памятью, а сами эффективные тензоры – как тензоры вязкости, упругости и т.д. В представленном в настоящей заметке исследовании ответ на этот вопрос получен. Сформулируем его в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** *Имеют место следующие утверждения:*

(i) *Верны свойства регулярности*

$$\mathbf{R}^\sigma, \mathbf{R}_1^\theta \in L^\infty(0, T)^{3 \times 3 \times 3 \times 3}, \mathbf{Q}_1^{ij}, \mathbf{Q}_2^{ij} \in L^\infty(0, T)^{3 \times 3}, \mathbf{S}_0^\sigma, \mathbf{S}_0^\theta \in L^\infty(\Pi_T)^{3 \times 3}.$$

(ii) *Тензоры мгновенных вязких напряжений  $\mathbf{P}^\sigma$  и  $\mathbf{P}^\theta$  удовлетворяют свойствам симметрии*

$$\mathbf{P}^\sigma ijkl = \mathbf{P}^\sigma jikl = \mathbf{P}^\sigma jilk = \mathbf{P}^\sigma klij, \mathbf{P}^\theta ijkl = \mathbf{P}^\theta jikl = \mathbf{P}^\theta jilk = \mathbf{P}^\theta klij$$

*и строгой положительной определенности:*

*существует постоянная  $c_1 > 0$  такая, что*

$$(\mathbf{P}^\sigma : \mathbf{X}) : \mathbf{X} \geq c_1 |\mathbf{X}|^2, \quad (\mathbf{P}^\theta : \mathbf{X}) : \mathbf{X} \geq c_1 |\mathbf{X}|^2 \quad \forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}_{symm}^{3 \times 3}.$$

(iii) *Тензоры мгновенной упругости  $\mathbf{G}^\sigma$  и  $\mathbf{G}^\theta$  удовлетворяют свойствам симметрии*

$$\mathbf{G}^\sigma ijkl = \mathbf{G}^\sigma jikl = \mathbf{G}^\sigma jilk, \quad \mathbf{G}^\theta ijkl = \mathbf{G}^\theta jikl = \mathbf{G}^\theta jilk \quad \forall i, j, k, l \in 1, 2, 3,$$

$$(\mathbf{G}^\sigma : \mathbf{X}) : \mathbf{W} = (\mathbf{G}^\sigma : \mathbf{W}) : \mathbf{X}, \quad (\mathbf{G}^\theta : \mathbf{X}) : \mathbf{W} = (\mathbf{G}^\theta : \mathbf{W}) : \mathbf{X} \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}_{symm}^{3 \times 3}.$$

*Они являются неотрицательными, но вырожденными:*

$$(\mathbf{G}^\sigma : \mathbf{X}) : \mathbf{X} \geq 0, \quad (\mathbf{G}^\theta : \mathbf{X}) : \mathbf{X} \geq 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}_{symm}^{3 \times 3},$$

*и при этом  $(\mathbf{G}^\sigma : \mathbf{X}) : \mathbf{X} = 0$  и  $(\mathbf{G}^\theta : \mathbf{X}) : \mathbf{X} = 0$  для  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}_{symm}^{3 \times 3}$  тогда и только тогда, когда  $X_{11} + X_{22} = 0$  и  $X_{33} = 0$ .*

(iv) *Тензоры*

$$\mathbf{H}_\sigma^s := s\mathbf{P}^\sigma + \mathbf{G}^\sigma + s\bar{\mathbf{R}}^\sigma(s), \quad s > 0,$$

$$\mathbf{H}_\theta^s := s\mathbf{P}^\theta + \mathbf{G}^\theta + s\bar{\mathbf{R}}_1^\theta(s) + s \sum_{i,j=1}^6 \bar{\mathbf{Q}}_1^{ij}(s) \otimes \bar{\mathbf{Q}}_2^{ij}(s), \quad s > 0,$$

*удовлетворяют свойствам симметрии*

$$\mathbf{H}_\sigma^s ijkl = \mathbf{H}_\sigma^s jikl = \mathbf{H}_\sigma^s jilk, \quad \mathbf{H}_\theta^s ijkl = \mathbf{H}_\theta^s jikl = \mathbf{H}_\theta^s jilk,$$

$$(\mathbf{H}_\sigma^s : \mathbf{X}) : \mathbf{W} = (\mathbf{H}_\sigma^s : \mathbf{W}) : \mathbf{X}, \quad (\mathbf{H}_\theta^s : \mathbf{X}) : \mathbf{W} = (\mathbf{H}_\theta^s : \mathbf{W}) : \mathbf{X} \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}_{symm}^{3 \times 3}$$

*и свойствам строгой положительной определенности:*

*существует постоянная  $c_2^s > 0$  такая, что*

$$(\mathbf{H}_\sigma^s : \mathbf{X}) : \mathbf{X} \geq c_2^s |\mathbf{X}|^2, \quad (\mathbf{H}_\theta^s : \mathbf{X}) : \mathbf{X} \geq c_2^s |\mathbf{X}|^2 \quad \forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}_{symm}^{3 \times 3}.$$

(v) *Матрицы  $\mathbf{S}_0^\sigma(\mathbf{x}, t)$  и  $\mathbf{S}_0^\theta(\mathbf{x}, t)$  являются симметричными.*

В пункте (iv) четрой сверху обозначается преобразования Лапласа по переменной  $t$  от соответствующей функции:

$$\bar{\phi}(s) = \mathcal{L}[\phi](s) = \int_0^{+\infty} \phi(t) e^{-st} dt, \quad s > 0.$$

При этом функция  $\phi = \phi(t)$  считается продолженной нулем за пределы отрезка  $[0, T]$ . Свойства положительной определенности (iv) означают, что главные части интегро-дифференциальных уравнений (3) и (4) имеют параболический тип.

Свойство вырожденности эффективного тензора упругости для щетинистых структур впервые было установлено в [4, Th. 5.21]. В настоящем исследовании посредством систематического изучения задач на шаблонных микроскопических и мезоскопических ячейках удалось проверить выполнение этого условия и для двухуровневой структуры.

**5. О разрешимости задачи HBS.** Установленные в теореме 1 свойства эффективных коэффициентов позволяют обосновать следующую теорему о корректности усредненной модели, в которой специфические данные какой-либо конкретной микроструктуры роли не играют.

**Теорема 2.** Пусть тензоры  $\mathbf{P}^\sigma$ ,  $\mathbf{G}^\sigma$ ,  $\mathbf{R}^\sigma(t)$ ,  $\mathbf{P}^\theta$ ,  $\mathbf{G}^\theta$ ,  $\mathbf{R}_1^\theta(t)$ ,  $\mathbf{R}_2^\theta(t_1, t_2)$  и матрицы  $\mathbf{S}_0^\sigma(\mathbf{x}, t)$  и  $\mathbf{S}_0^\theta(\mathbf{x}, t)$  заданы и имеют свойства (i)-(v) теоремы 1. Пусть при этом они не связаны, вообще говоря, с решениями исходной задачи на микроскопическом уровне, описанной в п. 1. Тогда для любых достаточно гладких начальных и граничных данных для  $\mathbf{u}$  и заданных функций  $\mathbf{p}^0$  и  $\mathbf{v}^0$ , задача HBS имеет единственное слабое обобщенное решение (с. о. р.).

Понятия с. о. р. вводится стандартно в теории обобщенных решений уравнений математической физики.

*Работа первого соавтора (С.А. Саженкова) поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (код проекта III.22.4.2) и РФФИ (грант № 18-01-00649).*

### Библиографический список

1. Саженков С.А., Шибанова Е.В. Исследование аэродинамики в окрестности листа растения с учетом опущения методом гомогенизации Аллера-Бриана // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2016. – №1 (89). – С. 173–179.

2. Саженков С.А. Описание аэродинамики в окрестности листа растения с учетом опущения с помощью модифицированной HBS-модели // Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования [Электронный ресурс]: сб. науч. ст. междунар. конф., 14-17 ноября 2017 г./ АлтГУ; [отв. ред. Е. Д. Родионов]. – Барнаул: АлтГУ, 2017. – 1 эл. опт. диск (DVD). – № гос. регистрации 0321704250. – С. 477–487.

3. Саженков С.А., Саженкова Е.В. Обобщенная HBS-модель обтекания листа растения воздухом // МАК: «Математики – Алтайскому краю»: сб. трудов всеросс. конф. по математике с международным участием. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2018. – С. 100-104.

4. Hoffmann K.-H., Botkin N.D., Starovoitov V.N. Homogenization of interfaces between rapidly oscillating fine elastic structures and fluids // SIAM J. Appl. Math. – 2005. – Vol. 65, no.3. – P. 983–1005.

УДК 517.972.5 + 51-72

## Аппроксимация решения нестационарной односторонней задачи диффузии-абсорбции

*Т.В. Саженкова<sup>1</sup>, С.А. Саженков<sup>2,3</sup>*

<sup>1</sup>*АлтГУ, Барнаул; <sup>2</sup>ИГиЛ СО РАН, НГУ, Новосибирск*

<sup>3</sup>*Хэйлунцзянский ун-т, Харбин*

**1. Аннотация.** Доклад посвящён исследованию начально-краевой задачи для нестационарного нелинейного уравнения диффузии-абсорбции с ограничением значений диффузионного потока и однородными начальными и граничными условиями. Изучается семейство приближённых решений, получаемых с помощью метода штрафа с применением интегрального оператора штрафа А. Каплана. Доказывается, что семейство приближённых решений сильно сходится к решению исходной задачи в анизотропном пространстве Бохнера при стремлении малого параметра регуляризации к нулю. Затем в результате систематического изучения структуры оператора штрафа устанавливается свойство равномерной аппроксимации в пространстве непрерывных по совокупности переменных функций. Настоящее исследование является развитием работ [1-3], более точно, их продолжением на нестационарный случай.

**2. Постановка и разрешимость задачи.** Рассматривается начально-краевая задача для нестационарного уравнения диффузии-абсорбции с односторонним ограничением на диффузионный поток и однородными начально-краевыми условиями.

**Задача N-D-A.** В пространственно-временном цилиндре  $G_T := \Omega \times (0, T)$ , где  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  – ограниченная область с гладкой границей  $\partial\Omega$  и  $T = \text{const} > 0$  – заданный момент времени, требуется найти функцию  $u = u(x, t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\partial_t u - \text{div}_x (\mu(t) J) + |u|^{p-2} u = f, \quad (1a)$$

в котором

$$J \in \partial\Phi(\nabla_x u), \quad \Phi(\tau) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} Q(\tau(x)) dx, \quad Q(\tau) = \begin{cases} |\tau|^p, & |\tau| \leq 1, \\ +\infty, & |\tau| > 1, \end{cases} \quad (1b)$$