фиксированное целое; если $f(x^{n+1}) \pm g(x^n) \in \mathrm{Cent}R$ для всех $x \in R$, то R коммутативно. В [1] справедливость гипотезы доказана при $n = 2, 3, 4$.

В работе [2, 3] удалось получить положительный ответ на эту гипотезу при $n = 7, 8$, а также при отсутствии в кольце 2-кручения.

В настоящей работе, исследован вопрос коммутативности кольца R, удовлетворяющего условию $\alpha(x^n) + \beta(x^m) \in \mathrm{Cent}R$, α, β – автоморфизмы R, n, m – фиксированные целые, причем $n, m > 1$ и $n \neq m + 1$. Доказана коммутативность кольца с указанным условием для небольших значений n и m, а также при ограничениях на кручение.

Теорема 1. Пусть R – ассоциативное кольцо с $1, \alpha$, β – автоморфизмы R для всех $x \in R$ выполняется условие $\alpha(x^4) + \beta(x^2) \in \mathrm{Cent}R$. Тогда R коммутативно.

Теорема 2. Пусть R – ассоциативное кольцо с $1, \alpha$, β – автоморфизмы R для всех $x \in R$ выполняется условие $\alpha(x^6) + \beta(x^3) \in \mathrm{Cent}\, R$, причем кольцо R без 6-кручения. Тогда R коммутативно.

Библиографический список

1. Khan, M.A. Commutativity of rings with constraints on pair of automorphisms / M.A. Khan // Advances in Theoretical and Appleid Mathematics. – 2006. №2, v. 1. – 119-126.

2. Кислицин, А.В. О гипотезе Мохаррама Хана / А.В. Кислицин // МАК-2008: материалы XI региональной конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. Ун-та, 2008. – С. 11–12.

3. Кислицин, А.В. О коммутативности ассоциативных колец, удовлетворяющих тождествам / А.В. Кислицин, Ю.Н. Мальцев // Известия Алтайского государственного университета. – 2009. – №1(61). – С. 50-53.

УДК 512.55

О сжатых графах делителей нуля конечных коммутативных локальных колец

Е.В. Журавлев, О.А. Филина

АлтГУ, г. Барнаул

Пусть S – коммутативная полугруппа с нулем, $x \in S$, $\mathrm{Ann}(x) = \{y \in S \mid xy = 0\}$. Введем на S отношение эквивалентности:

$\forall x, y \in S \quad x \sim y \Leftrightarrow \mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(y)$. Классы эквивалентности будем обозначать $[x]$, $x \in S$, а соответствующее фактормножество $S/\sim$.

Отношение $\sim$ является конгруэнцией на S: для любых $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$ если $x_1 \sim x_2$ и $y_1 \sim y_2$, то $x_1x_2 \sim y_1y_2$. Следовательно, мы можем рассматривать фактормножество $S/\sim$ как полугруппу относительно операции $[x][y] = [xy]$. Сжатым графом делителей нуля $\Gamma(S/\sim)$ полугруппы S будем называть граф, вершинами которого являются элементы $S/\sim$ и две вершины $[x]$, $[y]$ (не обязательно различные) соединяются ребром (или петлей) тогда и только тогда, когда $[x][y] = [0]$ (равносильно $xy = 0$).

Пусть R – конечное коммутативное локальное кольцо с единицей, $J(R)$ и R^* – радикал Джекобсона и группа обратимых элементов кольца R соответственно, $F = R/J(R) = GF(p^r)$ – конечное поле, $F^* = F \setminus \{0\}$. Существуют элементы $m_1, ..., m_h \in J(R)$ такие, что кольцо R раскладывается в прямую сумму F-модулей (см. [1]): $R = F \oplus Fm_1 \oplus ... \oplus Fm_h$, причем $J(R) = Fm_1 \oplus ... \oplus Fm_h$. Рассмотрим случай, когда $\mathrm{char} R = p$ и $\dim_F J/J^2 = 3$, $\dim_F J^2/J^3 = 1, \dim_F J^3 = 1$, $J^4 = 0$,

$$R = F \oplus Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fu_3 \oplus Fv \oplus Fw,$$

где $\{u_1, u_2, u_3, v, w\}$ – базис идеала $J(R)$ над полем $F, u_1, u_2, u_3 \in J/J^2, v \in J^2/J^3$, $w \in J^3$.

В работе [2] классифицированы с точностью до изоморфизма все кольца R указанного типа. Наша цель – построить сжатый граф делителей нуля $\Gamma(S/\sim)$ одного из таких колец. А именно, рассмотрим кольцо со следующим умножением базисных элементов: $u_1^2 = v$, $u_2^2 = w, u_3^2 = w \ u_1v = w$ (см. [2], теорема 3, пункт 8). Непосредственным вычислением получаем, что

$$R = [1] \bigcup_{s_i, l_j \in F} [u_1 + s_iu_2 + l_ju_3] \bigcup_{n_i, k_j \in F} [u_2 + n_iu_3 + k_jv] \bigcup_{m_i \in F} [u_3 + m_iv] \cup [v] \cup [w] \cup [0],$$

где

$$[u_1 + s_iu_2 + l_ju_3] = F^*(u_1 + s_iu_2 + l_ju_3) + Fv + Fw,$$
$$[u_2 + n_iu_3 + k_jv] = F^*(u_2 + n_iu_3 + k_jv) + Fw,$$
$$[u_3 + m_iv] = F^*(u_3 + m_iv) + Fw,$$
$$[v] = F^*v + Fw, [w] = F^*w, [0] = \{0\}, [1] = R^*,$$

и для любых $s_i, n_i, m_i, l_j, k_j \in F$, $i, j \in \{1, ..., p^r\}$,

$$\mathrm{Ann}\left(u_1 + s_i u_2 + l_j u_3\right) = \\ = \bigcup_{n_\alpha \in F}\left[u_2 + n_\alpha u_3 - \left(s_i + l_j n_\alpha\right)v\right] \cup [u_3 - l_j v] \cup [w] \cup [0],$$

$$\mathrm{Ann}\left(u_2 + k_j v\right) = \\ = \bigcup_{l_\beta \in F}[u_1 - k_j u_2 + l_\beta u_3] \bigcup_{m_\alpha \in F}[u_3 + m_\alpha v] \cup [v] \cup [w] \cup [0],$$

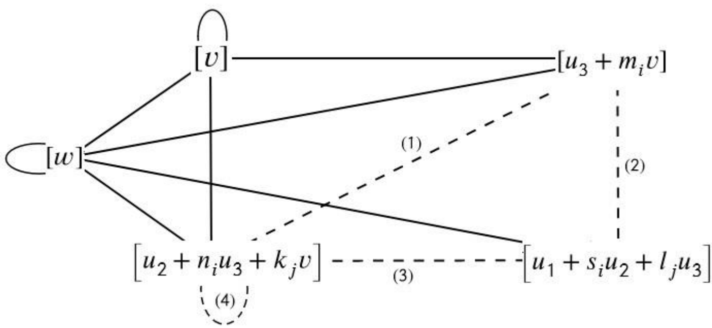
$$\mathrm{Ann}\left(u_2 + n_i u_3 + k_j v\right) = \\ = \bigcup_{l_\beta \in F}[u_1 - (k_j + l_\beta n_i)u_2 + l_\beta u_3] \bigcup_{k_\alpha \in F}[u_2 - \frac{1}{n_i}u_3 + k_\alpha v] \cup [v] \cup \\ \cup [w] \cup [0], \text{если } n_i \neq 0,$$

$$\mathrm{Ann}(u_3 + m_i v) = \\ = \bigcup_{s_\alpha \in F}[u_1 + s_\alpha u_2 - m_i u_3] \bigcup_{k_\alpha \in F}[u_2 + k_\alpha v] \cup [v] \cup [w] \cup [0],$$

$$\mathrm{Ann}(v) = \bigcup_{n_\alpha, k_\beta \in F}[u_2 + n_\alpha u_3 + k_\beta v] \bigcup_{m_\alpha \in F}[u_3 + m_\alpha v] \cup [v] \cup [w] \cup [0],$$

$\mathrm{Ann}(w) = J$.

На рисунке 1 представлено геометрическое изображение сжатого графа $\Gamma(S/\sim)$, за исключением вершин $[0]$ и $[1]$ ($[0]$ смежна со всеми вершинами, а $[1]$ смежна только с $[0]$).



1) если $n_i = 0$;
2) если $m_i + l_j = 0$;
3) если $k_j + s_\alpha + l_\beta n_i = 0$;
4) если $n_i n_j + 1 = 0$.

рис. 1

В данном изображении вершины $[u_1 + s_i u_2 + l_j u_3]$, $[u_2 + n_i u_3 + k_j v]$, $[u_3 + m_i v]$ это группы вершин графа $\Gamma(S/\sim)$, причем пунктирные ребра означают смежность вершин графа при выполнение некоторых условий, указанных внизу рисунка.

Данная работа продолжает исследования, начатые в [3]. Цель исследований – построить графы делителей нуля коммутативных колец порядка p^{6r} (для колец порядка p^{5r} задача решена в [4]). Этот результат, как пример, важен для актуальной в настоящее время тематике по классификации конечных колец, удовлетворяющих некоторому условию на их графы делителей нуля.

Библиографический список

1. Raghavendran R. Finite associative rings // Compositio Math. – 969. – V. 21. – P. 195–229.

2. Zhuravlev E.V. On the classification of finite commutative local rings // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2006. – № 3. – С. 15–29.

3. Журавлев Е.В., Монастырева А.С. О графах делителей нуля коммутативных локальных колец // Математики – Алтайскому краю: сборник трудов всероссийской конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2018. – С. 11-13.

4. Bloomfield N. The zero divisor graphs of commutative local rings of order p^4 and p^5, Communication in Algebra. – 2013. – V. 41. – 765–775.

УДК 512.552.4

Об одном минимальном ненулевом *L*-многообразии над полем из трех элементов

А.В. Кислицин

Алтайский государственный педагогический университет, г. Барнаул

В работе строится пример минимального ненулевого *L*-многообразия векторных пространств над полем *GF*(3).

Ключевые слова: *мультипликативное векторное пространство, тождество мультипликативного векторного пространства, L-многообразие, минимальное ненулевое L-многообразие.*