9. Петров Е.П. О стандартном тождестве в конечнопорожденной нильпотентной алгебре R над произвольным полем с условием $\dim \mathrm{R}^{\mathrm{N}} / R^{\mathrm{N}+1} = 2$ // Сибирские электронные математические известия. – 2019. – № 16. – С. 1981-2002.

10. Петров Е.П. О строении, определяющих соотношениях и тождествах в 2-порожденной нильпотентной алгебре R с условием $\dim \mathrm{R}^2 / R^3 = 3$ // Межд. конференция «Мальцевские чтения», 19–23 августа 2019 г., тезисы докладов, Новосибирск. – С. 169-170.

ПОДСЕКЦИЯ ГЕОМЕТРИЯ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

УДК 514.765

Исследование конформно киллинговых векторных полей на пятимерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях

Т.А. Андреева [1], Д.Н. Оскорбин [1], Е.Д. Родионов [1]

[1] АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена исследованию конформно киллинговых векторных полей на пятимерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях. Конформно киллинговы поля играют важную роль в теории солитонов Риччи, а также порождают важный класс локально конформно однородных (псевдо)римановых многообразий. В римановом случае В.В. Славским и Е.Д. Родионовым было доказано, что такие пространства являются либо конформно плоскими, либо конформно эквивалентны локально однородным римановым многообразиям. В псевдоримановом случае вопрос их строения остается открытым.

Ключевые слова: *конформно киллинговы векторные поля, лоренцевы многообразия, k-симметрические пространства.*

Псевдориманово многообразие $(M,\, g)$ называется симметрическим порядка k, если $\nabla^k R = 0$, $\nabla^{k-1} R \neq 0$, где $k \geq 1$ и R – тензор кривизны (M, g)

Симметрические лоренцевы многообразия порядков 2 и 3 изучены в работах Галаева, Алексеевского [1], Сеновиллы [2].

Векторное поле K на (псевдо)римановом многообразии $(M,\, g)$ называется конформно киллинговым векторным полем, если выполняется равенство $L_K g = f(\rho)$, где $L_K g$ производная Ли метрического тензора вдоль поля *K*, $f(\rho)$ – гладкая функция на многообразии.

Поля Киллинга на 2-симетрических лоренцевых многообразиях изучались Оскорбиным, Родионовым и Эрнстом [3]. Изучением конформно киллинговых полей на различных классах лоренцевых многообразий занимался Холл [10].

Из теоремы Ву [4] следует, что любое лоренцево многообразие локально может быть представлено в виде прямого произведения некоторого риманова многообразия (M_1, g_1) и локально неразложимого лоренцева многообразия (M_2, g_2).

Все рассматриваемые далее лоренцевы многообразия предполагаются локально неразложимыми.

С помощью теоремы А.С. Галаева и Д.В. Алексеевского [1] можно выбрать систему локальных координат (v, x^1, x^2, x^3, u) на M, где (M, g) – неразложимое лоренцево пятимерное многообразие, такую, что она представима следующей формулой

$$g = 2dudv + \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2 + (H_{110}(x^1)^2 + 2H_{120}x^1x^2 + 2H_{130}x^1x^3$$
$$+ H_{220}(x^2)^2 + 2H_{230}x^2x^3 + H_{330}(x^3)^2 + \sum_{i=1}^{3}(x^i)^2uH_{ii1})du^2,$$

где H_{ii1} – ненулевые действительные числа, а H_{ij0} – произвольные константы.

Обозначим основной алгоритм:

1) запись уравнения $L_X g = f(p)g$ для определения комфорно киллингова поля в локальных координатах Д.В. Алексеевского – А.С. Галаева [1];

2) нахождение частного решения уравнения $L_X g = f(p)g$;

3) построение общего решения с помощью уравнения для нахождения полей Киллинга.

Уравнение конформно киллингова векторного поля в локальных координатах на пятимерном 2-симметрическом неразложимом лоренцевом многообразии с метрикой Д.В. Алексеевского – А.С. Галаева примет вид системы дифференциальных уравнений (1):

$$\frac{1}{2}\frac{dX_1}{dx^2} + \frac{1}{2}\frac{d\,X_2}{d\,x^1} = 0, \qquad 2\frac{dU}{dv} = 0, \qquad \frac{1}{2}\frac{dX_1}{dx^3} + \frac{1}{2}\frac{dX_3}{dx^1} = 0,$$
$$-f + \frac{dX_j}{dx^j} = 0, \qquad \frac{1}{2}\frac{dX_2}{dx^3} + \frac{1}{2}\frac{dX_3}{dx^2} = 0, \qquad \frac{dU}{dx^j} + \frac{1}{2}\frac{dX_j}{dv} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(H_{ii1}u+H_{ii0})\left(x^i\right)^2\frac{dU}{dv}+H_{120}x^1x^2\frac{dU}{dv}+\left(H_{130}x^1\frac{dU}{dv}+H_{230}x^2\frac{dU}{dv}\right)x^3$$
$$-2f+\frac{dU}{du}+\frac{dV}{dv}=0,$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(H_{ii1}\,u+H_{ii0})\left(x^i\right)^2\frac{dU}{dx^j}+H_{120}x^1x^2\frac{dU}{dx^j}+\left(H_{130}x^1\frac{dU}{dx^j}+H_{230}x^2\frac{dU}{dx^j}\right)x^3$$
$$+\frac{dV}{dx^j}+\frac{1}{2}\frac{dX_2}{du}=0,$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(2H_{ii1}fu+2H_{ii0}f-\ H_{ii1}U-2(H_{ii1}u+H_{ii0})\frac{dU}{du}\right)\left(x^i\right)^2$$
$$+((H_{111}u\ +\ H_{110})X_1+H_{120}X_2+H_{130}X_3-(2(H_{120}f$$
$$-H_{120}\frac{dU}{du})x^1-\ H_{120}X_1u)-(H_{221}u+H_{220})X_2-\ H_{230}X_3)x^2$$
$$-(2(H_{130}\,f-H_{130}\frac{dU}{du})x^1+\ 2(H_{230}f-H_{230}X_2$$
$$-(H_{331}u+H_{330})X_3))x^3+2\frac{dV}{du}=0,$$

Для выше приведенной системы уравнений построим частное решение.

Теорема 1. Векторное поле

$$K=(2fv+c)\frac{d}{dv}+fx^1\frac{d}{dx^1}+fx^2\frac{d}{dx^2}+fx^3\frac{d}{dx^3},$$

где c, f – некоторые постоянные, на 2-симметрическом пятимерном неразложимом лоренцевом многообразии M с локальной системой координат Д.В. Алексеевского – А.С. Галаева [1], является конформно киллинговым.

Проверим справедливость системы уравнений (1) для поля K.

Все уравнения, кроме последнего, очевидно, выполнены, последнее уравнение выполнено, так как после подстановки значений V, X_1, X_2, X_3, U и раскрытия всех скобок мы получаем:

$$-H_{111}f(x^1)^2u-H_{110}f(x^1)^2-H_{221}f(x^2)^2u-H_{220}f(x^2)^2-H_{331}f(x^3)^2u$$
$$-H_{330}f(x^3)^2+H_{111}f(x^1)^2u+H_{110}f(x^1)^2+H_{120}fx^1x^2+H_{130}fx^1x^3$$
$$-2H_{120}fx^1x^2+H_{120}fx^1x^2+H_{221}f(x^2)^2u+H_{220}f(x^2)^2$$
$$+H_{230}fx^2x^3-2H_{130}fx^1x^3-2H_{230}fx^2x^3+H_{130}fx^1x^3$$
$$+H_{230}fx^2x^3+H_{331}f(x^3)^2u+H_{330}f(x^3)^2=0.$$

Теорема доказана.

Имеет место

Лемма. Пусть $(M,\ g)$ – (псевдо) риманово многообразие, K, P – конформно киллинговы векторные поля на M с константой $f \in R$. Тогда K - P есть векторное поле Киллинга на M.

Действительно, вычитая почленно из равенства $L_K g = fg$ равенство $L_P g = fg$, получаем $L_{K-P} g = fg$.

Следствие. В условиях теоремы 1 пространство конформно киллинговых векторных полей может быть построено с помощью частного решения конформно киллингова уравнения и пространства полей Киллинга.

В работе Оскорбина Д.Н. и Родионова Е.Д была доказана.

Теорема 2. Пусть X – векторное поле Киллинга с координатами $V(v, x^1, \dots, x^n, u)$, $X_j(v, x^1, \dots, x^n, u)$, $U(v, x^1, \dots, x^n, u)$ (V, X^j, U – гладкие функции), на обобщенном многообразии Кахена-Уоллаха (CW_d^{n+2}, g) размерности $n + 2 \geq 4$, с метрикой

$$g = 2dvdu + \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2 + \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(u) x^i x^j \right) (du)^2, \quad a_{ij} = \sum_{k=0}^{d} H_{kij} u^k.$$

Общее решение уравнения Киллинга имеет вид:

$$U = 0,$$
$$X_i = b_i(u) + f_{ik} x^k,$$
$$V = -\dot{b_\iota}(u) x^i + c$$

где $c \in R$ – произвольная константа, функции $b_i(u)$ определяются системой дифференциальных уравнений $(\ddot{b_\iota})(u) = a_{ij}(u) b_j(u)$, (f_{ik}) – постоянная кососимметрическая матрица, коммутирующая с $A = a_{ij}(u)$. Размерность пространства полей Киллинга не меньше $2n + 1$ и не больше $2n + 1 + \frac{n(n-1)}{2}$.

Таким образом, используя следствие леммы, теорему 2 при $n = 3$, $d = 1$ и утверждение теоремы 1, получим теорему 3.

Теорема 3. Пусть X – конформно киллингово векторное поле с координатами $V(v, x^1, x^2, x^3, u)$, $X_i(v, x^1, x^2, x^3, u)$, $U(v, x^1, x^2, x^3, u)$ (V, X_i, U – гладкие функции, i = 1,2,3), на 2-симметрическом пятимерном неразложимом лоренцевом многообразии M с локальной системе координат Д.В. Алексеевского – А.С. Галаева [1]. Общее решение уравнения конформно киллингова поля имеет вид:

$$U = 0,$$
$$X_i = b_i(u) + f_{ik} x^k + f x^i,$$
$$V = -\dot{b_\iota}(u) x^i + 2fv + c,$$

где $c \in R$ – произвольная константа, функции $b_i(u)$ определяются системой дифференциальных уравнений $(\ddot{b_\iota})(u) = a_{ij}(u) b_j(u)$, (f_{ik}) – постоянная кососимметричная матрица, коммутирующая с

$A = (a_{ij})$, где $a_{ij(u)} = H_{ij0} + H_{ij1}u$. Размерность пространства конформно-киллинговых полей не меньше 8 и не больше 11.

Библиографический список

1. Galaev A. S., Alexeevskii D. V.Two-symmetric Lorentzian manifolds //J. Geom. Physics. 2011. Vol. 61, N 12. P. 2331–2340.

2. Blanco O. F., Sanchez M., Senovilla J. M.Structure of second-ordersymmetric Lorentzian manifolds // Journal of the European Mathe-maticalSociety. 2013. Vol. 15. P. 595–634.

3. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Эрнст И.В.О размерностях простран-ства полей Киллинга на 2–симметрических лоренцевых многообрази-ях.//Математические заметки СВФУ. 2019. – Is. 3., Vol. 26. – С. 47–53.

4. Wu H.On the de Rham decomposition theorem // Illinois Journal ofMath-ematics. 1964. Vol. 8. Issue 2. P. 291–311.

5. Cahen M., Wallach N.Lorentzian symmetric spaces // Bull. Amer. Math.Soc. 1970. Vol. 76. P. 585–591.

6. Galaev A. S., Leistner T.Holonomy groups of Lorentzian manifolds:classification, examples, and applications, in: Recent Developments in Pseudo-Riemannian Geometry, in: ESI Lect. Math. Phys., Eur. Math. Soc., Z ̈urich,2008, pp. 53–96.

7. Walker A. G.On parallel fields of partially null vector spaces // Quart. J.Math., Oxford Ser. 1949. Vol. 20. P/ 135–145.

8. Brozos-V ́azquez M., Garc ́ia-R ́io E., Gilkey P., Nikcevic S., Vazquez-Lorenzo R.The geometry of Walker manifolds. Synthesis Lectures onMathematics and Statistics // Morgan & Claypool Publ. 2009

9. Oskorbin D.N., Rodionov E.D.Ricci solitons and killing fields ongeneralized Cahen-Wallach manifolds.// J. Siberian Mathematical Journal. Soc.2019. V. 60.

10. Hall G.S.Symmetries and Curvature Structure in General Relativity.//World Scientific Publishing Co. Re. Ltd, 2004.