Из чётности f^{+} и её 2π-периодичности следует, что $\lambda=\pm 2m$ – целое чётное число. Тогда $u^{+}(\varphi,p)$ представляется в виде сумм произведений:

$A_{2m}(\varphi)=C_{2m}\cos 2m\varphi + D_{2m}\sin 2m\varphi$; $B_{2m}(p)=\exp(2mp)+\exp(-2mp)$,

и с точностью до множителей $[\exp(2m) + \exp(-2m)]$ постоянные C_{2m} и D_{2m} совпадают с коэффициентами Фурье в (1), и

$$u^{+}(\varphi,p) = \sum A_{2m}(\varphi)\cdot B_{2m}(p).$$

Аналогично конструируется и решение задачи Дирихле с нечётными начальными данными: $u^{-}(\varphi,p) = \sum A_{2m+1}(\varphi)\cdot B_{2m+1}(p)$. Здесь

$$A_{2m+1}(\varphi)= C_{2m+1}\cos(2m+1)\varphi+D_{2m+1}\sin(2m+1)\varphi,$$

$$B_{2m+1}(p)=\exp((2m+1)p) - \exp(-(2m+1)p),$$

и постоянные C_{2m+1}, D_{2m+1} с точностью до множителей

$$[\exp(2m+1)-\exp(-2m-1)]$$

совпадают с коэффициентами Фурье в (2).

Теорема. Для любых граничных условий $f(\psi)$, совпадающих со своим рядом Фурье, задача Дирихле для листа Мёбиуса имеет решение.

В классической задаче Дирихле для областей в евклидовых пространствах известен Принцип Максимума: максимум и минимум гармонической функции достигается на границе, см., например [1].

В рассматриваемом нами варианте такой задачи это утверждение нами пока не установлено, поэтому вопросы единственности решения и его непрерывной зависимости от граничных условий остаются пока открытыми.

Библиографический список

1. Годунов С.К. Уравнения Математической Физики. – М.: Наука, 1979. – 392 с.

УДК 519.67

Задача об охране картинной галереи в случае ортогонального многоугольника

А.В. Гринкевич[1], Д.Н. Оскорбин[2]
АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена исследованию задачи об охране картинной галереи, когда план ее интерьера представлен в виде ортогонального многоугольника. Проводится обзор известных результатов, и получен псевдокод алгоритма расстановки охранников.

Ключевые слова: *вычислительная геометрия, ортогональный многоугольник, алгоритм расстановки охранников, задача об охране картинной галереи.*

На сегодняшний день задача об охране картинной галереи является одной из хорошо изученных задач в области вычислительной геометрии [1]. В реальном мире она возникает как задача об охране внутреннего пространства художественной галереи наименьшим числом средств наблюдения, которые наблюдают за всеми ее залами. В вычислительной геометрии план галереи представлен в виде простого многоугольника, а средство наблюдения – точкой внутри него.

Это не единственный вариант данной задачи. В одних модификациях изменениям подвергаются позиции охранников, в других изменяется план внутреннего пространства галереи.

В данной работе рассматривается случай, когда план интерьера охраняемого объекта представлен в виде ортогонального многоугольника, т.е. такого, стороны которого пересекаются под прямыми углами, а также приводится псевдокод алгоритма расстановки охранников. Каждый охранник находится в вершине многоугольника и представляет собой точку. Необходимо найти наименьшее число охранников, которого всегда достаточно и иногда необходимо для того, чтобы все залы внутреннего пространства охраняемого объекта находились под наблюдением.

Ранее получен результат, что в этом случае всегда достаточно и иногда необходимо $\left[\frac{n}{4}\right]$ охранников. Известны три доказательства: доказательство Джона Кана, Марии Клаве и Даниэля Клейтмана [3], доказательство Анны Любив [2] и доказательство Ёрга-Рюдигера Сака и Туссэна [4].

Некоторое время спустя, математиком из США Джозефом Рурком было найдено альтернативное доказательство, подтверждающее эту оценку. Оно представлено в виде теоремы.

Определение. Вершина ортогонального многоугольника является рефлективной, если величина угла при ней больше π.

Теорема. $\left[\frac{r}{2}\right] + 1$ охранников иногда необходимо и всегда достаточно для обзора внутренности простого ортогонального многоугольника из r рефлективных вершин.

Схема доказательства. Доказательство проводится индукцией по числу рефлективных вершин. Теорема очевидно верна для $r \leq 1$: одного охранника достаточно. Поэтому предположим, что теорема верна для всех $r' < r$. Рассмотрим два случая:

1. Есть две рефлективных вершины, которые видят друг друга вдоль вертикальной или горизонтальной линии.

2. Таких вершин нет. В этом случае достаточно установить наличие нечетного разреза, которое производится с помощью следующей леммы.

Замечание. Под нечетным разрезом понимается разрез, при котором одна из двух частей содержит нечетное число рефлективных вершин.

Лемма. Ортогональный многоугольник с нечетным числом $r \geq 3$ рефлективных вершин, два из которых не могут видеть друг друга вдоль вертикальной или горизонтальной линии, допускает нечетный разрез.

На основе описанного выше доказательства [5] разрабатывается алгоритм расстановки охранников, вычислительная сложность которого сравнима с уже известным алгоритмом расстановки охранников в рассматриваемом случае и равна $O(n \log n)$.

Псевдокод описанного выше алгоритма выглядит следующим образом:

1. Поиск рефлективных вершин ортогонального многоугольника:

if узел решетки является вершиной трех пикселей цифрового пространства then

вершина рефлективная;

добавить в список рефлективных вершин;

2. Поиск разреза многоугольника:

а) if существуют две рефлективных вершины, которые «видят» друг друга then

многоугольник разрезается на две области отрезком с концами в этих вершинах;

б) if таких вершин нет then

осуществляем поиск нечетного разреза, т.е. такого, что в одной из двух частей при разрезе одна из частей имеет нечетное количество рефлективных вершин.

Отметим, что если существует область хотя бы с двумя рефлективными вершинами, то такой разрез возможен, что доказано в работе [5].

while нечетный разрез существует do

разбиваем многоугольник на части нечетными разрезами.

3. if нечетный разрез не существует then

осуществляем расстановку охранников.

if область четырехугольная then

охранник устанавливается в произвольную вершину;

else это шестиугольная область, в ней есть рефлективная вершина, и охранник устанавливается в нее.

Библиографический список

1. O'Rourke, Joseph. Art Gallery Theorems and Algorithms // Oxford University Press. – 1987.

2. A. Lubiw. Decomposing polygonal regions into convex quadrilaterals // Proc. 1st ACM Symposium on Computational Geometry. – 1985. – C. 97–106.

3. J. Kahn, M. Klawe, D. Kleitman. Traditional galleries require fewer watchmen // SIAM J. Alg. Disc. Meth. – 1983. – T. 4, вып. 2. – C. 194–206.

4. J. R. Sack, G. T. Toussaint. Guard placement in rectilinear polygons // Computational Morphology / Toussaint G. T. – North-Holland, 1988. – C. 153–176.

5. O'Rourke, Joseph. An alternate proof of the rectilinear art gallery theorem // Journal of Geometry, vol. 21. – 1983. – C. 119–130.

УДК 514.74

К структуре линейной геометрии метрического пространства разбиений конечного множества

С.В. Дронов

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

Рассмотрен один из аспектов задачи оценивания степени различий двух и более разбиений конечного множества на дизъюнктные части. В специальной кластерной метрике, введенной на семействе всех таких разбиений, изучена структура кратчайших маршрутов между двумя разбиениями. Предложен алгоритм построения таких маршрутов.

Ключевые слова: *разбиения конечного множества, кластерная метрика, отрезок в метрике, алгоритм выбора разбиений*

Задача классификации или разбиения изучаемого множества объектов на дизъюнктные части становится в современных условиях все более востребованной. Ярчайшей иллюстрацией этого является, например, таргетирование рекламных продуктов, классификация тех или иных товаров по признакам повышенного спроса среди определенных групп населения, задача дифференциальной диагностики в медицине и многие другие. При этом современная математика предлагает широкий спектр способов произведения подобных