Информатика и вычислительная биология. Невский Диалект БВХ-Петербург, 2003. – 654 с.

УДК 512.547.2

Построение таблицы характеров группы диэдра порядка 32

Л.В. Истомина
Южно-уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г.Челябинск

Аннотация: В статье рассматривается построение таблицы характеров группы диэдра D_{32}.
Ключевые слова: *порядок, таблицы характеров, группа дэдра*

В современной теории конечных групп наряду с абстрактными теоретико-групповыми методами исследования широко и плодотворно используются методы теории представлений. Теория представлений нашла своё применение в кристаллографии и квантовой механике.

Основной вклад в теорию представлений в середине 30-х годов внесли работы Р. Брауэра о модулярных представлениях конечных групп. Теория Брауэра имеет много приложений в теории конечных групп, устанавливает связи с теорией представлений алгебр и раскрывает фундаментальное значение теоретико-числовых вопросов в теории групп и теории представлений. При доказательстве теоремы о разрешимости групп нечетных порядков (Томпсон и Фейт) используется теория модулярных характеров Брауэра.

Теория представлений находит своё применение при описании строения групп обратимых элементов центров целочисленных групповых колец [1–2]. Теория групп и групповых колец служит теоретической основой для научно-исследовательских работ студентов [2] и реализации их проектной деятельности [3]. Фундаментальные знания теории групп необходимы в профессиональной деятельности учителя математики [4].

В данной статье рассмотрим построение таблицы характеров группы диэдра порядка 32.

Полная группа преобразований симметрии правильного n -угольника P_n называется *группой диэдра (диэдральной группой)* и обозначается символом D_n. Вращение $b = \begin{Vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix}$

многоугольника в плоскости на угол $\theta = \frac{2\pi}{n}$ вокруг центра O, расположенного в начале прямоугольной системы координат, порождает циклическую группу $\langle b \rangle$ порядка n. В D_n содержится еще отражение $a = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$ многоугольника P_n относительно оси, проходящей через центр и одну из вершин [5].

По определению $a^2 = e$. Различные преобразования симметрии $e, b, b^2, \dots, b^{n-1}, a, ab, \dots a^{b^{n-1}}$ в количестве $2n$ штук исчерпывают всю группу D_n.

Составим таблицу характеров для $n = 16$, $D_{32} = \langle a, b | a^2 = b^{16} = 1, aba = b^{-1}$

Найдем классы сопряженных элементов, используя формулу. Так как $aba = b^{-1}$, умножим на $a = a^{-1}$ справа, получим $ab = b^{-1}a$, аналогично, $ba = ab^{-1}$. Получим классы сопряженности: $\{1\}, \{b, b^{15}\}, \{b^2, b^{14}\}, \{b^3, b^{13}\}, \{b^4, b^{12}\}, \{b^5, b^{11}\}, \{b^6, b^{10}\}, \{b^7, b^9\}, \{b^8\}$, $\{ab, ab^3, ab^5, ab^7, ab^9, ab^{11}, ab^{13}, ab^{15}\}, \{a, ab^2, ab^4, ab^6, ab^8, ab^{10}, ab^{12}, ab^{14}\}$.

Будем придерживаться обозначений и определений из [5]. Из теоремы (47.8) и следствия (47.15) в [6] следует, что существует 4 линейных представления и 7 представления степени 2; причем первая строчка таблицы характеров тривиальна и равна 1.

$\chi_1(a) = -1, \chi_1(ab) = -1, \chi_1(b^j) = 1$

$\chi_2(a) = 1, \chi_2(ab) = -1, \chi_3(a) = -1, \chi_3(ab) = 1$

$\chi_{2,3}(b^j) = (-1)^j$

Для представлений второго порядка по формуле о виде индуцированных представлений [6, с 311] получим, что $\chi_{4-10}(a) = 0$ (сумма элементов по диагонали), и для $\chi_{4-10}(ab) = 0$.

Теперь найдем $\chi_k(b^j)$ и соберем полученные результаты в таблицу характеров (Таблица 1):

$\chi_4(b) = 2\cos\frac{2\pi}{16} = 2\cos\frac{\pi}{8} = \omega$

$\chi_4(b^2) = 2\cos\frac{2\pi\cdot 2}{16} = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

$\chi_4(b^3) = 2\cos\frac{2\pi\cdot 3}{16} = 2\cos\frac{3\pi}{8} = \omega'$

$\chi_4(b^4) = 2\cos\frac{2\pi\cdot 4}{16} = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\chi_4(b^5) = 2\cos\frac{2\pi\cdot 5}{16} = 2\cos\frac{5\pi}{8} = -\omega'$

$\chi_4(b^6) = 2\cos\frac{2\pi\cdot 6}{16} = 2\cos\frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2}$

$\chi_4(b^7) = 2\cos\frac{2\pi\cdot 7}{16} = 2\cos\frac{7\pi}{8} = -\omega$

$\chi_4(b^8) = 2\cos\frac{2\pi\cdot 8}{16} = 2\cos\pi = -2$

Аналогично находим $\chi_{5-10}(b^j)$.

Таблица 1 – Таблица характеров группы диэдра D_{32}

x^G	1 1	8 a	8 ab	2 b	2 b^2	2 b^3	2 b^4	2 b^5	2 b^6	2 b^7	1 b^8
χ_0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
χ_4	2	0	0	ω	$\sqrt{2}$	ω'	0	$-\omega'$	$-\sqrt{2}$	$-\omega$	-2
χ_5	2	0	0	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2
χ_6	2	0	0	ω'	-2	$-\omega$	0	ω	$\sqrt{2}$	$-\omega'$	-2
χ_7	2	0	0	0	-2	0	2	0	-2	0	2
χ_8	2	0	0	$-\omega'$	$-\sqrt{2}$	ω	0	$-\omega$	$\sqrt{2}$	ω'	-2
χ_9	2	0	0	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	-2	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	2
χ_{10}	2	0	0	$-\omega$	$\sqrt{2}$	$-\omega'$	0	ω'	$-\sqrt{2}$	ω	-2

Где $\omega = 2\cos\frac{\pi}{8}$, $\omega' = 2\cos\frac{3\pi}{8}$

Работа выполнена при финансовой поддержке ФГБОУ ВО «Шадринский государственный педагогический университет» по договору о выполнении НИР «Разработка и реализация системы методического сопровождения проектной деятельности будущих учителей математики с использованием цифровых образовательных технологий» заявка № ШК-022-21 от 26.03.20.

Библиографический список

1. Шумакова Е.О. Центральные единицы целочисленных групповых колец диэдральных и близких к ним групп // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2008. – Том 14, №4. – С. 172-184.

2. Шумакова Е.О. Центральные единицы целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса // Сибирские электронные математические известия. – 2008. – Том 5. – С. 691-698.

3. Шумакова Е.О., Миссаль В.В. Применение технологии учебных проектов при изучении профильных математических дисциплин / Современные проблемы науки и образования. 2019. № 6. С. 3.

4. Шумакова Е.О., Севостьянова С.А., Вагина М.Ю. Формирование профессиональных компетенций бакалавров при изучении дисциплины

"Алгебра" / Современные проблемы науки и образования. 2019. № 5. С. 45.

5. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры: Учебник для вузов. – 2-е изд., исправл. – М.: Физико-математическая литература, 2001. – 272с.

6. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. – М.: Наука, 1969. – 668с.

УДК 519

Применение принципов выигрышной стратегии переключательной игры Шеннона

Н.И. Казанцева, А.Н. Гамова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г.Чернышевского г. Саратов

Актуальность темы обусловлена столкновением интересов в различных сферах, так что на первое место выходит вопрос выбора оптимальной стратегии. В такой ситуации теория игр, имеющая в запасе достаточное количество методов, позволяет успешно решать подобные задачиоптимизации.

Ключевые слова: теория графов, переключательная игра Шеннона, игры на графах.

В середине прошлого века выдающийся американский математик, создатель теории информации, Клод Шеннон предложил схему перебора вариантов для шахматной программы, а также создал переключательную игру на графах, которая, в свою очередь, является математической моделью для исследования процесса принятия решений. В то же время, другой известный математик Дэвид Гейл создал свой аналог данной игры – Бридж-Ит, полем для которой также является граф. Обе эти игры относятся к играм типа гекс. Сам Гекс –это игра на ромбической доске, имеющей гексагональную сетку, который можно представить также как игру на графе [1].

Цель работы – практическая реализация применения принципов выигрышной стратегии переключательной игры Шеннона для игр типа гекс.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи: найти алгоритм приведения Бридж-Ит к переключательной игре