2. Озорзин, А. Простейшие клеточные автоматы и их практическое применение [Электронный ресурс] // Хабр [Электронный ресурс]: Сообщество IT-специалистов. URL: https://habr.com/ru/post /273393/#:~:text=А%20что%20же%20тогда%20такое,клеток%20в%20 предыдущий%20момент%20времени (дата обращения: 03.09.2020).

УДК 514.765

Об одном уравнении Эйнштейна на группах Ли с полусимметрической связностью

А.А. Павлова[1], Е.Д. Родионов[1], О.П. Хромова[1]
[1]АлтГУ, г. Барнаул

В настоящейработе исследуется уравнение Эйнштейна вида $Symr = \Lambda g,$ где $Symr$ – симметрическая часть тензора Риччи, g – метрический тензор, Λ – некоторая константа на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой и полусимметрической связностью.

Ключевые слова: *уравнение Эйнштейна, трехмерные группы Ли, полусимметрическая связность.*

Пусть $(M;\ g)$ – (псевдо) риманово многообразие размерности n. Определим полусимметрическую связность формулой:

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X, \qquad (1)$$

где ∇^g – связность Леви-Чивиты.

Замечание. Полусимметрическая связность впервые была открыта Э. Картаном и изучалась в работах многих математиков [1-8]. Данную связность также называют связностью с векторным кручением.

Определим тензор кривизныR и тензор Риччи r риманова многообразия $(M,\ \ g)$, используя полусимметрическую связность, формулами:

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

где $[\cdot;\cdot]$ – скобка Ли векторных полей;

$$r = tr(U \to R(X,U)Y).$$

Тензор Риччи полусимметрической связности, вообще говоря, не является симметрическим, поэтому вместо тензора Риччи в уравнении Эйнштейна $r = \Lambda g,$ рассмотрим его симметрическую часть, то есть будем решать задачу

$$r_{ij} + r_{ji} = \Lambda g_{ij}. \qquad (2)$$

Пусть $M = G$ – трехмерная группа с левоинвариантной римановой метрикой Ли; LG — алгебра Ли группы Ли G. Зафиксируем базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ в алгебре LG и положим $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$, где c_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли. Тогда символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты ∇^g выражаются через структурные константы и компоненты метрического тензора:

$$(\Gamma^g)_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks}(c_{ijs} - c_{jsi} + c_{sij}).$$

Пусть $V \in LG$, тогда символы Кристоффеля связности ∇ с векторным кручением (1) задаются равенством:

$$\Gamma_{ij}^k = (\Gamma^g)_{ij}^k + g_{ij} V^k - V^s g_{sj} \delta^k.$$

Компоненты тензора кривизны R и тензора Риччи r можно вычислить с помощью следующих формул:

$$R_{ijks} = (\Gamma_{ij}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + c_{ij}^l \Gamma_{lk}^p) g_{ps}.$$

$$r_{ij} = R_{ijks} g^{js}.$$

Теорема 1 [6]. *Пусть (G,g) – трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда*

1) если G унимодулярная, то в алгебре Ли U группы G существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G имеет вид:

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3,\ [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2,\ [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1,$$

2) если G не унимодулярная, то в алгебре Ли NU группы G существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G имеет вид:

$$[e_1, e_2] = \alpha e_2 + \beta e_3,\ [e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta e_3,\ \text{где } \alpha + \delta = 2.$$

Пусть G – трехмерная унимодулярная группа Ли. Фиксируем в алгебре Ли группы G ортонормированный базис теоремы 1, определим компоненты тензора Риччи и сформируем систему уравнений (3).

$$\begin{aligned}
&2\lambda_3\lambda_2 - \lambda_3^2 - \lambda_2^2 + \lambda_1^2 - 2(V^3)^2 - 2(V^2)^2 = \Lambda,\\
&-\lambda_3^2 + 2\lambda_3\lambda_1 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - 2(V^3)^2 - 2(V^1)^2 = \Lambda,\\
&-\lambda_2^2 + 2\lambda_2\lambda_1 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - 2(V^2)^2 - 2(V^1)^2 = \Lambda,\\
&-V^3\lambda_2 + V^3\lambda_1 + 2V^1V^2 = 0,\\
&\lambda_3 V^2 - V^2\lambda_1 + 2V^1V^3 = 0,\\
&-\lambda_3 V^1 + V^1\lambda_2 + 2V^2V^3 = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Данная система равенств имеет следующие три решения:

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\lambda_3^2 + V_3^2}{\lambda_3}, \lambda_3 \in R\backslash\{0\}, V = \{0,0,V_3\}, \Lambda = \lambda_3^2.$
2. $\lambda_1 = \frac{\left(\lambda_3 \pm \sqrt{\lambda_3^2 - 4V_1^2}\right)}{2}, \lambda_2 = \lambda_3, V = \{V_1, 0,0\}, V_1^2 \le \frac{\lambda_3^2}{4},$ $\Lambda = \lambda_1\lambda_3 - V_1^2.$

3. $\lambda_1 = \lambda_3 \in R, \lambda_2 = \frac{\left(\lambda_3 \pm \sqrt{\lambda_3^2 - 4V_2^2}\right)}{2}, V = \{0, V_2, 0\}, V_2^2 < \frac{\lambda_3^2}{4}$, $\Lambda = \lambda_2 \lambda_3 - V_2^2$.

Пусть теперь G – трехмерная не унимодулярная группа Ли. Фиксируем в алгебре Ли группы G ортонормированный базис теоремы 1, определим компоненты тензора Риччи и сформируем систему уравнений (4).

$$
\begin{aligned}
&-2\alpha^2 - 2\alpha V^1 - \beta^2 - 2\beta\delta - \delta^2 - 2(V^3)^2 - 2\gamma^2 - 2\gamma V^1 - 2(V^2)^2 = \Lambda,\\
&-2\alpha^2 - 4\alpha V^1 - \beta^2 + \delta^2 - 2(V^3)^2 - 2\alpha\gamma - 2\gamma V^1 - 2(V^1)^2 = \Lambda,\\
&-\delta^2 - 2\gamma^2 - 4\gamma V^1 + \beta^2 - 2(V^2)^2 - 2\alpha\gamma - 2\alpha V^1 - 2(V^1)^2 = \Lambda,\\
&V^3\delta + 2V^1V^2 + V^2\alpha = 0,\\
&\beta\delta V^2 + 2V^1V^3 + V^3\gamma = 0,\\
&-2\alpha\delta - 2\beta\gamma - \beta V^1 - V^1\delta + 2V^2V^3 = 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Данная система равенств имеет следующие три решения:

1. $\alpha = -\gamma + 2, \beta = \delta = \pm\sqrt{-\gamma^2 + 2\gamma}, V = \{-2,0,0\},\ \gamma \in (0,2)$, $\Lambda = 0$.
2. $\alpha = 1, \beta \in R, \gamma = 1, \delta = -\beta, \Lambda = -4, V = \{0,0,0\}$.
3. $\alpha = 1, \beta \in R, \gamma = 1, \delta = -\beta, \Lambda = 0, V = \{-1,0,0\}$.

Отметим, что во втором решении векторное поле V, определяющее полусимметрическую связность, тривиально. И значит, $\nabla = \nabla^g$. Таким образом, справедлива

Теорема 2.*Пусть (G; g; ∇) – трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой* g *и полусимметрической связностью* ∇, *удовлетворяющая уравнению* $r_{ij} + r_{ji} = \Lambda g_{ij}$. *Тогда*

1) если группа Ли G унимодулярна, то ее алгебра Ли изоморфна so(3) или e(2), а структурные константы ее алгебры Ли и координаты векторного поля V входят в список решений 1–3 системы уравнений (3);

2) если группа Ли G не унимодулярна, то структурные константы ее алгебры Ли и координаты векторного поля V входят в список решений 1–3 системы уравнений (4).

Библиографический список

1. Cartan E. Sur les varietes a connexion affine et la theorie de la relativit´eg´en´eralis´ee (deuxi`emepartie) // Ann. Ecole Norm. Sup. 1925. Vol. 42.

2. Yano K. On semi-symmetric metric connection // Revue Roumame de Math. Pure etAppliquees. 1970. Vol. 15.

3. Agricola I., Kraus M. Manifolds with vectorial torsion //Differential Geometry and its Applications. 2016. Vol. 46.

4. Muniraja G. Manifolds Admitting a Semi-Symmetric Metric Connection and a Generalization of Schur's Theorem // Int. J. Contemp. Math. Sci. 2008.Vol. 3, No 25.

5. Barua B., Ray A. Kr. Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold // Indian J. pure appl. Math. 1985. Vol. 16, № 7.

6. Milnor J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. 1976. Vol. 21.

7. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Уравнение Эйнштейна на трехмерных метрических группах Ли с векторным кручением // Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 181. №. 3

8. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Уравнение Эйнштейна на трехмерных локально симметрических (псевдо)римановых многообразиях с векторным кручением // Математические заметки СВФУ. 2019. Т. 26. №. 4.

УДК 517.16

Плотникова Е.А., Саженков А.Н.

Некоторые геометрические приемы доказательства неравенств

Е.А. Плотникова[1], А.Н. Саженков[2]

[1]Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск; [2]АлтГУ, г. Барнаул

В работе рассматривается два приема доказательства неравенств основанные на соображении выпуклости функций.

Ключевые слова: *неравенства, неравенство Караматы, неравенство Йенсена, выпуклые и вогнутые функции,мажорирующий набор.*

Достаточно сложные неравенства, например предлагаемые для доказательства на математических соревнованиях различного уровня, решаются при помощи сочетания нескольких разных идей, в том числе и геометрических [1-2].

Далее рассматриваются два приема доказательства неравенств, основанные на соображении выпуклости функций.