2. Кучмент Л.С., Демидов В.Н., Мотовилов Ю.Г. Формирование речного стока. Физико-математические модели. – М.: Изд-во Наука, 1983. − 216 с.

3. Папин А.А. Разрешимость модельной задачи тепломассопереноса в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. − Новосибирск, 2008. − Т. 49, № 4. − С. 13–23.

4. Антонцев С.Н., Папин А.А. Приближенные методы решения задач двухфазной фильтрации // Доклады Академии наук СССР. − 1979. − Т. 247, № 3. − С. 521–525.

5. Gray J.M.N.T. Water movement in wet snow // Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. − 1996. − V. 354, N. 1707. − P. 465–500.

6. Colbeck S.C. A theory of water percolation in snow // Journal Glaciol. − 1972. − V. 11, N. 63. − P. 369–385.

7. Папин А.А. Разрешимость "в малом" по времени системы уравнений одномерного движения двух взаимопроникающих вязких несжимаемых жидкостей // Динамика сплошной среды. − 1999. − № 114. − С. 64–70.

8. Sellers S. Theory of water transport in melting snow with a moving surface // Cold Regions Science and Technology. − 2000. − V. 2000, N 31. − P.47-57.

9. Сибин А.Н., Папин А.А. Тепломассоперенос в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. − 2021. − Т. 62, № 1 (365). − С. 109–118.

УДК 532.5

Об одной модели динамики жидкого слоя в следе за ударом упругим телом

К.Е. Найденова[1], К.А. Шишмарев[1], А.А. Коробкин[2]

[1]АлтГУ, г. Барнаул

[2]Университет Восточной Англии, Великобритания

Статья посвящена математическому моделированию жидкости в результате удара упругим телом по свободной поверхности. Основной упор сделан на описании поведения жидкости в следе за ударом. В состоянии покоя жидкость имеет заданную конечную глубину. С использованием асимптотических методов выводится модель поведения жидкости в следе за ударом в случае большой начальной скорости удара и малой глубины жидкого слоя.

Ключевые слова: *идеальная жидкость, удар упругим телом, свободная поверхность, асимптотические методы, главное приближение.*

Исследование поведения слоя жидкости в результате удара мотивировано несколькими причинами, например, экспериментами по осаждению капель в кольцевом газожидкостном потоке и массообмену между газом и жидкой пленкой [1]. Под действием большой скорости с поверхности жидкости срываются капли, которые, спустя некоторое время, ударяются о поверхность жидкости. В течение удара в следе образовываются пузыри захваченного воздуха. Часть из этих пузырей схлопывается, часть остается в жидком слое. При этом количество и размер этих пузырей может сильно варьироваться. Образование пузырей оказывается сильное влияние на теплообмен жидкого слоя, который служит теплопроводником в системах охлаждения. Для определения механизмов захвата воздуха необходимо описать динамику слоя жидкости в следе за ударом.

В работе [2] рассмотрена нелинейная нестационарная двумерная задача о косом ударе упругой пластиной о слой жидкости. Задача решалась в рамках теории удара о тонкий слой жидкости [3]. Условия согласования потоков под ударной пластиной и вне пластины учитывали образование струи на передней кромке смачиваемой части пластины и отрыв жидкости от пластины на задней кромке смачиваемой области. Результаты исследования были сосредоточены на динамике пластины. Поведение следа не исследовалось. В работе [3] движение жидкости под пластиной описывалось в рамках теории мелкой воды. Рассматривался случай удара с большой горизонтальной скоростью. Для выбранных параметров задачи течение в жидкости за следом не оказывает влияния на течение под пластиной, однако оно может иметь абсолютно разные характеристики. Рассмотрим систему уравнений, моделирующую поведение жидкого слоя в подобном случае. В силу условий удара ограничимся случаем большой начальной скорости и малой начальной толщины жидкого слоя.

Рассматривается двумерная задача о косом ударе тонкой упругой пластиной по тонкому слою жидкости. Начальная толщина жидкого слоя равна h. Задача решается в декартовой системе координат Oxy. Жидкий слой неограничен в направлении оси x, $0 < y < h$. Динамика жидкого слоя в полной постановке описывается уравнениями Навье-Стокса:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u, \qquad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 v, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\omega(x, y, z) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \ \frac{d\omega}{dt} = \nu \nabla^2 \omega, \quad (4)$$

а также кинематическим

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} u = v(x, \eta(x, t,), t), \quad (5)$$

и динамическим условиями

$$\vec{\tau} \cdot P < \vec{n} >= 0, \ \vec{n} \cdot P < \vec{n} >= \sigma æ, \quad (6)$$

Здесь u – скорость жидкости вдоль оси x, v – скорость жидкости вдоль оси y, ρ – плотность жидкости, p – давление жидкости, ν – коэффициент кинематической вязкости, ω – завихренность, η – высота свободной поверхности, P – тензор напряжения, $\vec{n}$ – вектор нормали к свободной поверхности, $\vec{\tau}$ – касательный вектор к свободной поверхности, σ – коэффициент поверхностного натяжения, æ – кривизна. Система уравнений (1)–(6) описывает движение жидкости в следе с учетом инерции, вязкости, гравитации и поверхностного натяжения. Система замыкается краевыми условиями под точкой отрыва жидкости от пластины $u = u_L(t)$, $\eta = h - s(t)$. Для упрощения системы уравнений (1)–(6) введем безразмерные переменные и функции, и определим среди всех перечисленных эффектов определяющие. Основном безразмерным параметром является отношение начальных вертикальной и горизонтальной скоростей удара соответственно $\varepsilon = \frac{V}{U}$. Остальные брезрамерны параметры следующие:

$$u = U\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}), v = V\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}),$$

$$x = h\varepsilon^{-1}\tilde{x}, \ y = h\tilde{y}, \ \eta = h\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}), \ t = \frac{h\tilde{t}}{V},$$

$$u_L(t) = U\tilde{u}_L(\tilde{t}), \ L(t) = h\varepsilon^{-1}\tilde{L}(\tilde{t}), \ s(t) = h\tilde{s}(\tilde{t}),$$

$$\omega = \frac{U}{h}\widetilde{\omega}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}), \ p = \rho V^2 \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}).$$

После обезрамеривания системы (1)–(6) и предельного перехода по малому параметру ε, в главном приближении получим:

$$u_t + uu_x + vu_y = 0, \quad (7)$$

$$v_t + vv_x + vv_y = -p_y, \quad (8)$$

$$u_x = -v_y, \quad (9)$$

$$\eta_t + \eta_x u = v \ \ (y = \eta(x, t)) \quad (10)$$

$$p = 0 \ \ (y = \eta(x, t)) \quad (11)$$

Система уравнений (10) получена для следующих параметров: $1/Re=O(\varepsilon)$, $\beta = O(\varepsilon^2)$, где Re – число Рейнольдса, β – безразмерный параметр, описывающий гравитацию и поверхностное натяжение, возникающий в динамическом условии. Порядки этих величин выбраны в соответствии с параметрами задачи, указанными в [2]. Система уравнений (7)–(11) в одном случае может быть решена методом характеристик [4]. Выведенная система уравнений описывает течение жидкости в следе за ударом. Получено, что для условий большой начальной скорости и малой начальной толщины жидкого слоя в главном приближении определяющим эффектом являются силы инерции, а эффектами гравитации, вязкости и поверхностного натяжения можно пренебречь.

Работа поддержана Российским Научным Фондом, "Эффект захвата воздуха при наклонном ударе тела по поверхности жидкости", номер проекта 19-19-00287.

Библиографический список

1. Cherdantsev A.V., Hann D.B., Hewakandamby B.N., Azzopardi B J. Study of the impacts of droplets deposited from the gas core onto a gas-sheared liquid film // International Journal of Multiphase Flow. 2017. V.88, pp.69–86.

2. Khabakhpasheva T.I., Korobkin A.A., Oblique elastic plate impact on thin liquid layer 2020 // Physics of Fluids. 2020. V.32. 062101.

3. Korobkin, A.A., Impact of two bodies one of which is cov-ered by a thin layer of liquid // Journal of Fluid Mechanics. 1995. V.300, pp. 43–58.

4. Shishmarev K.A., Khabakhpasheva T.I., Korobkin A.A., Free-surface flow behind elastic plate impacting on a thin liquid layer // Journal of Physics: Conference Series. 2020. V.1666. 012059.

УДК 519.63

Анализ стабилизированных методов конечных элементов для решения уравнения для насыщенности в задаче двухфазной неравновесной фильтрации

Д.А. Омариева[1], Д.Р. Байгереев[2], А.К. Бакишев[2]

[1]Восточно-Казахстанский технический университет им.Д.Серикбаева, г.Усть-Каменогорск, Казахстан;

[2]Восточно-Казахстанский университет им.С.Аманжолова, г.Усть-Каменогорск, Казахстан

В данной работе построен приближенный метод решения уравнения для насыщенности в задаче двухфазной неравновесной фильтрации. Это уравнение относится к уравнению типа конвекции-диффузии с преобладанием конвекции и с дополнительным членом, содержащим