уравнений (7)–(11) в одном случае может быть решена методом характеристик [4]. Выведенная система уравнений описывает течение жидкости в следе за ударом. Получено, что для условий большой начальной скорости и малой начальной толщины жидкого слоя в главном приближении определяющим эффектом являются силы инерции, а эффектами гравитации, вязкости и поверхностного натяжения можно пренебречь.

Работа поддержана Российским Научным Фондом, "Эффект захвата воздуха при наклонном ударе тела по поверхности жидкости", номер проекта 19-19-00287.

Библиографический список

1. Cherdantsev A.V., Hann D.B., Hewakandamby B.N., Azzopardi B J. Study of the impacts of droplets deposited from the gas core onto a gas-sheared liquid film // International Journal of Multiphase Flow. 2017. V.88, pp.69–86.

2. Khabakhpasheva T.I., Korobkin A.A., Oblique elastic plate impact on thin liquid layer 2020 // Physics of Fluids. 2020. V.32. 062101.

3. Korobkin, A.A., Impact of two bodies one of which is cov-ered by a thin layer of liquid // Journal of Fluid Mechanics. 1995. V.300, pp. 43–58.

4. Shishmarev K.A., Khabakhpasheva T.I., Korobkin A.A., Free-surface flow behind elastic plate impacting on a thin liquid layer // Journal of Physics: Conference Series. 2020. V.1666. 012059.

УДК 519.63

Анализ стабилизированных методов конечных элементов для решения уравнения для насыщенности в задаче двухфазной неравновесной фильтрации

Д.А. Омариева[1], Д.Р. Байгереев[2], А.К. Бакишев[2]

[1]Восточно-Казахстанский технический университет им.Д.Серикбаева, г.Усть-Каменогорск, Казахстан;

[2]Восточно-Казахстанский университет им.С.Аманжолова, г.Усть-Каменогорск, Казахстан

В данной работе построен приближенный метод решения уравнения для насыщенности в задаче двухфазной неравновесной фильтрации. Это уравнение относится к уравнению типа конвекции-диффузии с преобладанием конвекции и с дополнительным членом, содержащим производную решения третьего порядка. Из-за гиперболического характера уравнения его решение сопровождается рядом трудностей, которые приводят к необходимости тщательного выбора метода решения. На основе вычислительных экспериментов проведено сравнение трех классических стабилизированных методов конечных элементов (SUPG, GLS и USFEM).

Ключевые слова: *метод конечных элементов, стабилизированный метод, неравновесная фильтрация, SUPG, GLS, USFEM*.

Непропорциональность параметров задачи для уравнения конвекции-диффузии может привести к образованию слоистых структур в некоторых частях области задачи, которые трудно разрешить стандартными численными алгоритмами. Поэтому, чтобы решить эту проблему целесообразно использование стабилизированных численных методов, которые заключаются в добавлении к стандартной конечно-элементной постановке задачи слагаемого с искусственной вязкостью с некоторым стабилизирующим параметром.

Одна из основных моделей неравновесного течения [1] основана на термодинамических аргументах и усреднении по обьему микроскопических уравнений сохранения массы и момента, что привело к необходимости добавления дополнительных членов в макроскопические уравнения. В [1] введено понятие динамического капиллярного давления P_c^{dyn} (мгновенная локальная разность фазовых давлений), которое относится к статическому капиллярному давлению P_c^{stat} (капиллярному давлению при квазистатическом смещении) соотношением:

$$P_c^{\mathrm{dyn}} \equiv p_o - p_c = P_c^{\mathrm{stat}} - \tau_H(s)\frac{\partial s}{\partial t}, \qquad (1)$$

где p_o – фазовое давление нефти, τ_H- феноменологический коэффициент, которое принимает положительные значения, и s– водонасыщенность. Динамическое капиллярное давление было предметом многих экспериментальных [2] и теоретических [3] исследований.

К недостаткам стабилизированных методов можно отнести их чувствительность к выбору параметров стабилизации, что существенно влияет на устойчивость и точность метода. Поэтому проблема выбора параметра должна быть тщательно исследована.

В данной работе сравниваются три классических стабилизированных метода конечных элементов (SUPG, GLS и USFEM) к начально-граничной задаче для уравнения для насыщенности, а также параметры стабилизации на основе вычислительных экспериментов.

В ограниченной области $Q_T = \Omega \times (0,T)$, где $\Omega \subset R^2$с границей $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, рассматривается уравнение

$$\frac{\partial s}{\partial t} + As + B\frac{\partial s}{\partial t} = f, (x,t) \in Q_T \tag{2}$$

с начальным и граничными условиями:

$$\begin{gathered} s(x,0) = s_0, x \in \overline{\Omega}, \\ s = g_D, x \in \Gamma_D\ ; \quad \nabla s \cdot \vec{n} = g_N, x \in \Gamma_N, t > 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где

$$As = \vec{v} \cdot \nabla s - k_1 \nabla^2 s, Bs = -k_2 \nabla^2 s,$$

$\vec{n}$– внешняя нормаль к Γ_N, $\vec{v}$– известный вектор, f, g_D, g_N – задан-ные функции. Предположим, что задача имеет единственное решение в классе достаточно гладких функций.

Пусть $V = \{v \in H^1(0,T\,; H^1(\Omega)), v|_{\Gamma_D} = g_D\}$. В Ω введем квази-равномерную триангуляцию Θ. Пусть $V_h \subseteq V$ – конечно-элементное пространство кусочно-линейных функций на каждом элементе, τ – временной шаг.

Основной класс стабилизированных методов конечных элементов основан на расширении дискретной вариационной формулировки с помощью члена стабилизации, зависящего от сетки. Общий вид этих методов для задачи определяется следующим образом: найти $s_h \in V_h$, такое, что:

$$\begin{gathered} (s_h^n - s_h^{n-1}, w_h) + \tau a(s_h^n, w_h) + b(s_h^n - s_h^{n-1}, w_h) + \tau S(s_h^n, w_h) = \\ = \tau\phi(w_h), \forall w \in V_h \end{gathered} \tag{4}$$

где a и b – билинейные формы, соответствующие операторам A и B, $S(\cdot,\cdot)$ – стабилизирующий член, добавленный к стандартной формулировке Галеркина, общий вид которого имеет вид:

$$S(s_h, w_h) = \sum_K \tau_K \left(As_h - \phi, \tilde{A}w_h\right)_K \tag{5}$$

где τ_K– параметр стабилизации. Конкретный выбор оператора $\tilde{A}$ приводит к разным стабилизированным методам. Например [4]:

$$\begin{aligned} &SUPG: \quad \tilde{A}w_h = \vec{v} \cdot \nabla w_h \\ &GLS: \widetilde{A}\, w_h = -k\Delta w_h + \vec{v} \cdot \nabla w_h \\ &USFEM: \widetilde{A}\, w_h = k\Delta w_h + \vec{v} \cdot \nabla w_h \end{aligned} \tag{6}$$

Одним из важных моментов при реализации стабилизированных методов является выбор параметра стабилизации τ_K. Параметр выбирается на основе свойств задачи, таких как принцип дискретного максимума, анализ сходимости, устойчивость и другие. Примерами стабилизирующих параметров являются [5–8]:

$$\begin{gathered} \tau_K^c = \left(\frac{4k_1}{h_K^2} + \frac{2|\vec{u}_K|}{h_K}\right)^{-1}, \ \tau_K^s = \left(9\left(\frac{4k_1}{h_K^2}\right)^2 + \left(\frac{2|\vec{u}_K|}{h_K}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \\ \tau_K^a = \left(\frac{12k_1}{h_K^2} + \frac{2|\vec{u}_K|}{h_K}\right)^{-1}, \tau_K^{fv} = \left(\frac{6k_1}{h_K^2}\zeta\left(\frac{|\vec{u}_K|h_K}{3k_1}\right)\right)^{-1}, \end{gathered} \tag{7}$$

где h_K– диаметр треугольника K, $\zeta(x) = \{1, 0 \leq x \leq 1; x, x \geq 1\}$.

Проведено сравнение стабилизированных методов (6) и стабилизирующих параметров (7) на основе на двух вычислительных экспериментов. Исследование показало эффективность рассмотренных методов. Полученные результаты будут использованы в последующих исследованиях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (ИРН AP08053189).

Библиографический список

1. Hassanizadeh S.M., Celia M.A., Dahle H.K. Dynamic effects in the capillary pressure-saturation relationship and its impact on unsaturated flow // Vadose Zone Journal. 2002.– Vol. 1, No. 1. – P. 38–57.

2. O'Carroll D. M., Phelan T. J., Abriola L.M. Exploring dynamic effects in capillary pressure in multistep outflow experiments // Water Resour Res. 2005. – Vol. 41, No. 11.– P. W11419.

3. Cuesta C., van Duijn C.J., Hulshof J. Infiltration in porous media with dynamic capillary pressure: travelling waves // EurJ Appl Math. 2000. –Vol. 11.– P. 381–397.

4. Sendur A.A. Comparative Study on Stabilized Finite Element Methods for the Convection-Diffusion-Reaction Problems // Journal of Applied Mathematics. 2018. – No. 4259634.– P. 1–16.

5. John V., Schmeyer E. Finite element methods for time-dependent convection-diffusion-reaction equations with small diffusion // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2008. – Vol. 198. – P. 475–494.

6. Asensio M., Russo A. Stabilized Finite Elements with Matlab. 2002.

7. Knobloch P. On the choice of the SUPG parameter at outflow boundary layers // Advances in Computational Mathematics. 2009. –Vol. 31, No. 369. – P. 369–389.

8. Hauke G., Garcia-Olivares A. Variational subgrid scale formulations for the advection-diffusion-reaction equation // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2001. – Vol. 190. – P. 6847–6865.