УДК 532.546

Движение консервативной примеси в тающем снеге[1]

Папин А.А., Сибин А.Н.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
papin@math.asu.ru, sibin_anton@mail.ru

Аннотация

На основе уравнений неизотермической двухфазной фильтрации рассматривается задача движения консервативной примеси в тающем снеге. Математическая модель фильтрации воды и воздуха верифицирована с помощью экспериментальных данных.

Ключевые слова: многофазная фильтрация, пористая среда, тающий снег, фазовый переход, насыщенность, численное решение, солеперенос.

1. Введение

Талая вода, получаемая из сезонного снежного покрова в период снеготаяния, вносит большой вклад в формирование весеннего речного водотока в северных странах [1]. В процессе снеготаяния, различные химические примеси и соли, которые были накоплены в снежном покрове в зимний сезон, поступают в реку и в почву совместно с поверхностным и подземным стоком талой воды соответственно [2, 3]. Количество и время, за которое вымываются загрязнения, напрямую зависит от динамики жидкости в снежном покрове [4]. Существует множество эмпирических моделей, описывающих снежный покров в целом, без учета пористой структуры снега [5, 6], с другой стороны, наблюдения и полевые исследования показывают неравномерное выделение органических загрязнителей из снега, связанное с соответствующим неравномерным распределением насыщенности примеси по всему объему снежного покрова [7,8]. В большинстве своем эмпирические модели являются одномерными балансовыми моделями, не позволяющими вычислять скорость фильтрации жидкости, а модели, вычисляющие скорость фильтрации жидкости, обычно не учитывают фазовые переходы или пригодны только для специфичных режимов движения воды в снежном покрове. Последние исследования балансовых моделей сосредоточены на учете дополнительных факторов, вносящих изменения в снежный покров, таких как - выпадения осадков в виде дождя на уже сформированный снежный покров, промерзшего и не промерзшего грунта [1], наличия нескольких слоев снега [9,10]. В работе [11] предложена модель, описывающая разделение и перенос органических веществ в многослойном снежном покрове. Учитываются такие факторы, как высота снежного покрова, перенос загрязняющих веществ талой водой, а также динамика поступления твердых химических веществ на поверхность снежного покрова. Постулируется однородность снежного покрова, а также постоянство физических параметров.

Многомерные модели, в отличие от одномерных, оценивающих объемы потока жидкости только относительно вертикального уровня, позволяют вычислить распределение потока жидкости по объему пористого снега. В статье [12] предложена двумерная модель тепломассопереноса жидкости в тающем снеге, учитывающая вторичное замораживание талой воды внутри снежного покрова. Предложенный численный метод позволяет получить более точную оценку поверхностного стока, по сравнению с одномерными моделями. Но предложенная модель не учитывает в полной мере фазовые переходы и деформацию

[1]Работа выполнена при поддержке совместного проекта TUBITAK и РФФИ (грант № 20-58-46009)

ледового скелета снега (движение льда). Переход жидкости в лед уменьшает пористость снега, а сублимация, наоборот, увеличивает, что существенно влияет на траектории движения жидкости и загрязняющих веществ в снежном покрове.

Основы теории движения воды и воздуха в тающем снеге заложены в работах S.C. Colbeck [13] и его последователей [14, 15]. Однако, снег в данных работах хотя и рассматривался как многофазная среда, переменная пористость льда, его деформация и фазовые переходы не учитывались.

В работе [16] снежный покров рассматривается как трехфазная среда (вода, воздух, лед). Приведены эмпирические зависимости для капиллярного скачка (вода–воздух) и эмпирические формулы для коэффициента проводимости снега. Однако, авторы пренебрегают движением воздуха и существенно упрощают уравнение для температуры. В результате трехфазная модель сводится к уравнению для температуры и уравнению для объемной концентрации водной фазы.

В работе [17] построено автомодельное решение для модели двухфазной фильтрации при естественных граничных условиях. В [18] даны постановки следующих задач тепломассопереноса в тающем снеге: о движении воды и воздуха в тающем снеге с учетом фазовых переходов и деформации ледового скелета; о распределении водного стока тающего снега между грунтовыми и поверхностными водами; разработка алгоритма численного решения задачи о переносе консервативных солей в тающем снеге; построение модели движения грунтовых вод, контактирующих с промерзшим грунтом; постановка задачи абляции деформируемого снежно–ледового покрова. В работах [19, 20] проведены численные расчеты одномерных задач тепломассопереноса, исследовано изменение пористости и водонасыщенности снега. Используя экспериментальные данные из литературных источников проведена верификация математической модели фильтрации воды и воздуха в тающем снеге, состоящем из двух слоев с разной плотностью.

Целью настоящей работы является моделирования движения консервативной примеси в тающем снеге с учетом фазовых переходов, разработка алгоритма численного решения одномерной задачи, проведение численных расчетов.

2. Постановка задачи

Следуя [13–15, 17, 21] будем рассматривать тающий снег как сплошную среду, состоящую из воды ($i = 1$), воздуха ($i = 2$) и льда ($i = 3$), составляющего твердый пористый скелет. Фильтрация воды и воздуха в пористом ледовом скелете описывается уравнениями сохранения массы для каждой из фаз с учетом фазовых переходов, уравнениями двухфазной фильтрации и уравнением теплового баланса для трехфазной среды

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + div(\rho_i \vec{u}_i) = \sum_{j=1}^{3} I_{ji}, \quad i = 1, 2, 3; \quad I_{ji} = -I_{ij}; \quad \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij} = 0; \tag{1}$$

$$\phi s_i(\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0 \frac{\overline{k}_{0i}}{\mu_i}(\nabla p_i - \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2; \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta); \tag{2}$$

$$(\sum_{i=1}^{3} \rho_i^0 c_i \alpha_i) \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\sum_{i=1}^{3} \rho_i^0 \alpha_i c_i \vec{u}_i) \nabla \theta = div(\lambda_c \nabla \theta) - \omega I_{23} - \nu I_{13} + L(y). \tag{3}$$

Здесь $\vec{u}_i$ – скорость i-й фазы; ρ_i – приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией α_i соотношением $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ (условие $\sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$ является следствием определения ρ_i); I_{ji} – интенсивность перехода массы из j-й в i-ю составляющую в единице объема в единицу времени; ϕ – пористость снега; s_1, s_2 – насыщенности воды и воздуха ($\alpha_1 = \phi s_1$, $\alpha_2 = \phi s_2$, $\alpha_3 = 1 - \phi$, $s_1 + s_2 = 1$); $K_0(\phi)$ – тензор проницаемости пористой среды; $\overline{k}_{0i}$ – фазовые проницаемости ($\overline{k}_{0i} = \overline{k}_{0i}(s_i) \geq 0$, $\overline{k}_{0i}\big|_{s_i=0} = 0$); $\mu_i = const > 0$ – динамические вязкости; p_i – давления фаз; p_c – капиллярное давление, $\vec{g}$ – вектор ускорения силы тяжести; θ – температура среды ($\theta_i = \theta$, $i = 1, 2, 3$), $c_i = const > 0$ – удельная теплоемкость i-й фазы при постоянном объеме; $\nu = const > 0$ – удельная теплота плавления льда; $\omega = const > 0$ – удельная теплота сублимации льда; λ_c – теплопроводность снега, $L(y)$ – функция теплового источника, описывающая поглощение солнечной радиации. Ось y направлена вертикально вниз.

Система (1)–(3) дополняется гипотезами $\vec{u}_3 = 0$ (частицы льда неподвижны, структура льда как сплошной среды не уточняется [21]), $\rho_i^0 = const > 0$, $i = 1, 2, 3$; $\rho_3^0 < \rho_1^0$; $s_1 \equiv s$ – водонасыщенность ($1 - s = s_2$).

В рассматриваемом подходе важным моментом является корректное определение интенсивностей фазового перехода “лед-вода” и “лед-воздух”. Следует отметить, что для описания процессов испарения и конденсации молекул пара на межфазной границе “жидкость–пар” используется классическая формула Герца–Кнудсена–Ленгмюра [22, с. 88] и ее модификации. В соответствии с формулой Герца–Кнудсена–Ленгмюра интенсивность фазового перехода пропорциональна разности давления жидкости на фазовой границе и давления насыщения. Аналогичная формула используется для описания процесса сублимации в снеге [23]. Для моделирования интенсивности фазового перехода “лед-вода”, как правило, используется методология задачи Стефана, т.е. предполагается, что существует межфазная граница, на которой при определенной температуре скачком происходит переход льда в воду. При таком подходе не требуется задавать интенсивность фазового перехода “лед-вода”. Другой подход к процессу таяния снега подразумевает, что фазовый переход “лед-вода” происходит во всей толще снежно-ледового покрова и для описания распространений тепла нужно использовать уравнение вида (3) с соответствующей правой частью. Близкой по проблематике является задача тепломассопереноса в протаивающих (промерзающих) грунтах [24, 25]. Имеется ряд экспериментальных результатов по зависимости концентрации льда в пористой среде от температуры [26, 27]. Используемые в данной работе зависимости для интенсивности фазового перехода “лед-вода” опираются на идеи работ [25, 26].

$$I_{31} \equiv I = \begin{cases} -\lambda_1 \phi \theta s, & \theta < \theta^-; \\ 0, & \theta^- \leq \theta \leq \theta^+; \\ \lambda_2 (1-\phi)^2 \exp(\beta(\theta - \theta^+)), & \theta > \theta^+. \end{cases}$$

Здесь θ^+ – температура плавления льда, θ^- – температура замерзания воды, $\beta, \lambda_1, \lambda_2$ – размерные постоянные, характеризующие интенсивность фазового перехода ($[\beta]$=1/K,$[\lambda_1]$=кг/(м$^3 \cdot c\cdot$ K), $[\lambda_2]$=кг/(м$^3 \cdot c$)). В дальнейшем сублимацией и обменом массами между водой и воздухом пренебрегаем ($I_{12} = 0$, $I_{23} = 0$).

3. Физические свойства снега

Снег представляют собой светорассеивающую среду в достаточно широком диапазоне спектра солнечного излучения. В монографии [28] сделан обширный литературный обзор и изложена теория радиационного переноса в оптически неоднородных средах. Учет оптических свойств среды позволяет выявить особенности формирования теплового режима при объемном прогреве потоком солнечного излучения.

Если температура воздуха снижается до некоторого критического значения θ_{cr}, то вследствие уменьшения вклада длинноволнового излучения атмосферы поверхность будет находиться в состоянии радиационного равновесия. Таким образом, при температуре воздуха $\theta_a > \theta_{cr}$ происходит поверхностное плавление. Достаточно большой по размеру атмосферный лучистый поток обеспечивает перетекание тепла в глубь снежно-ледяного покрова, что совпадает с классической кондуктивной моделью нагрева непрозрачных материалов с образованием в глубине монотонно убывающего температурного профиля.

При достижении радиационного равновесия с температурой воздуха $\theta_a = \theta_{cr}$ вклад энергии в переизлучение с поверхности уравновешивается кондуктивным стоком тепла, расходуемым на поддержание установившегося температурного распределения, которое может иметь также экстремальный характер.

Если $\theta_a < \theta_{cr}$, то условия для поверхностного плавления отсутствуют. В этом случае в подповерхностном слое снега и льда поглощенная солнечная энергия должна превышать поверхностное эффективное тепловое переизлучение. Это означает, что имеются энергетические возможности для кондуктйвного перетекания тепла и к поверхности, и в глубину из зоны «перегрева». Внутреннее объемное поглощение солнечного излучения будет служить тепловым источником, поддерживающим состояние локального «перегрева».

Обычно при анализе теплового режима, употребляются два предельных случая оптических параметров: либо непрозрачная среда с поглощением на поверхности, либо прозрачная среда с поглощением потока излучения в объеме по закону Бугера [29]. Разумеется, применение предельных случаев правомерно, но при определенных условиях и далеко не для всех типов снега. Иными словами, имеется обширный класс природных процессов, когда наблюдаемые теплофизические эффекты невозможно объяснить и рассчитать, оставаясь в рамках традиционных подходов. В работе [28, с. 114] для тающего снега функцию теплового источника предлагается определять следующим образом:

$$L(y) = l_1 exp(-\kappa y) - l_2 exp(\kappa y).$$

Здесь κ – показатель ослабления излучения светорассеивающей среды, l_1, l_2 – заданные параметры.

Коэффициент теплопроводности снега зависит от плотности, структуры, температуры и водонасыщенности. На основании анализа опытных данных предложен ряд эмпирических формул для расчета зависимости коэффициента теплопроводности снега λ_c от плотности, однако при определенных величинах плотности снега ρ_c значение λ_c, вычисленные по разным формулам, могут отличаться более чем в два раза. Это можно объяснить различиями структурных характеристик снега в экспериментах разных авторов и главным образом пренебрежением зависимости λ_c от температуры. Например в работе [30, с. 135] для определения теплопроводности снега предлагается использовать следующую зависимость:

$$\lambda_c = a_c + b_c \rho_c^2, \tag{4}$$

где $\rho_c = \sum\limits_{i=1}^{3} \rho_i^0 \alpha_i$ – плотность снега, $a_c = const > 0$, $b_c = const > 0$.

Ряд формул для определения λ_c получен на основе теории теплопроводности многокомпонентных систем, например, в работе [31, с. 63] теплопроводность снега определяется следующим образом:

$$\lambda_c = (\lambda_a \varphi + \lambda_i (1-\varphi)\beta_c)/(\varphi + (1-\varphi)\beta_c). \tag{5}$$

Здесь $\varphi = 1 - \rho_c/\rho_3^0$, β_c – безразмерный параметр (для разных типов снега может изменятся в приделах от 0.15 до 0.25), λ_a, λ_i – коэффициенты теплопроводности воздуха и льда соответственно.

На рисунке 1 представлены графики зависимости теплопроводности снега от плотности рассчитанные по формулам (4) и (5) при $a_c = 0.00005$ Вт/(м·К), $b_c = 0.00000189$ Вт·м^5/К,

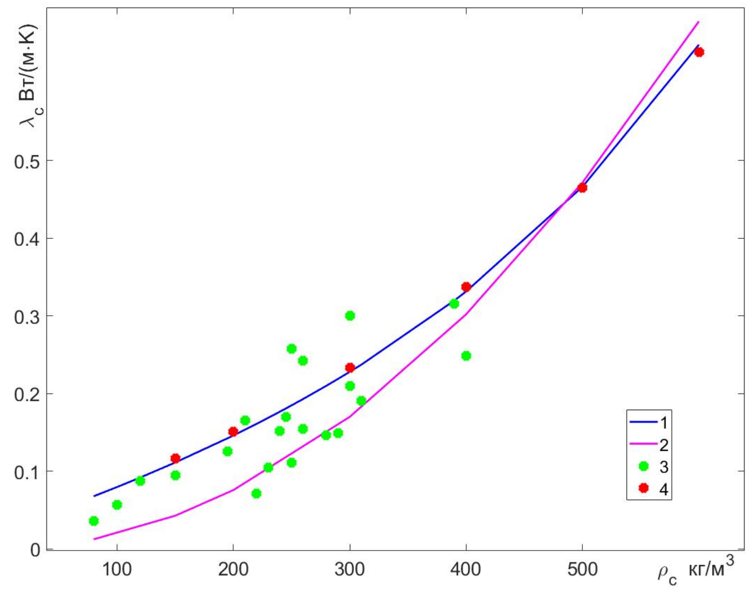

Рисунок 1. Зависимость коэффициента теплопроводности снега от плотности
1– рассчитанные значения коэффициента теплопроводности по формуле (5) [31];
2 – рассчитанные значения коэффициента теплопроводности по формуле (4) [30];
3 – экспериментальные данные из работы [32];
4 – экспериментальные данные из работы [33].

$\beta_c = 0.21$, а также экспериментальные данные из работ [32,33]. В работе [32] теплопроводность измерялась при температуре от -2 до -7 °C. В справочнике [33, с. 334] приведены данные при температуре близкой к 0 °C. Заметим, что соотношение (5) лучше согласуется с экспериментальными данными [33] в широком диапазоне изменения плотности снега.

Важным параметром при исследовании движения воды и воздуха в снеге является проницаемость пористого скелета [28]. Первые исследования зависимости коэффициента проницаемости от пористости были сделаны для грунтов (изменение пористости в грунте может быть вызвано, в частности, процессами внутренней суффозии и кольматации [34]). По аналогии с фильтрацией в грунте для снега коэффициент проницаемости задается следующим образом (обширный обзор литературы сделан в статье [13]): $K_0 = d_1\phi^m$ или $K_0 = d_2 \exp(\alpha\phi)$, а коэффициенты $\overline{k}_{0i} = s_i^n$. Здесь d_1, d_2 – размерные постоянные [м^2]; α – безразмерный заданный параметр; степень n, обычно, принимают равной 2, а $3 \le m \le 5$ [28, с. 13]. Капиллярное давление, как правило, зависит только от водонасыщенности и имеет вид $p_c(s) = \gamma/s$ [14] или $p_c(s) = \gamma/s + c$ [15], где γ, c – размерные постоянные [Па]. Для грунтов с переменной пористостью широко используется зависимость Козени $K_0 = B\phi^3/(1-\phi)^2$, где B – размерная постоянная [м^2].

При моделировании фильтрации воды в тающем снеге в работе [16] используют зависимость для грунтов вида [35]:

$$\overline{k}_{01} = \sqrt{s}(1-(1-s^{1/m})^m)^2,$$

где m, n – заданные постоянные, а коэффициент проницаемости задается зависимостью $K_0 = d(\phi)\exp(\alpha\rho_c/\rho_3^0)$ [36], где d – размерная функция, α – постоянная. Для капиллярного давления в работе [16] используется зависимость

$$p_c = \gamma(s^{-1/m}-1)^{1/n}, \tag{6}$$

где γ размерная постоянная [Па]; m, n – заданные постоянные.

4. Движение консервативной примеси

Для оценки качества воды необходимо учитывать эффекты диффузии, дисперсии и химического взаимодействия. Для этого используют модели химической гидродинамики, состоящие из законов сохранения масс твердой и жидкой фаз.

При использовании этих моделей делаются следующие общепринятые предположения [37]: жидкость и среда несжимаемы; вязкость жидкости не зависит от концентрации жидкой фазы.

В этом случае исходная модель распадается на «чисто» фильтрационную модель (1)–(3) и модель конвективной диффузии:

$$S + \frac{\partial}{\partial t}(\phi s_1 \sigma) + div(\sigma \vec{v}_1 - D\nabla\sigma) = 0. \tag{7}$$

Здесь σ – концентрация примеси, $\vec{v}_1$ – скорость фильтрации воды, S – источник, учитывающий возможное отложение (поступление) примеси. Для D и S используются зависимости: $D = \eta + \lambda_0|\vec{v}_1|$, $\eta = const > 0$ – коэффициент молекулярной диффузии, $\lambda_0 = const > 0$ – параметр дисперсии; $S = -\Gamma s_1(\sigma_* - \sigma)$, $\Gamma = const > 0$, $\sigma_* = const \in [0, 1]$.

Классические задачи фильтрации о движении двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пористой среде основаны на модели Маскета-Леверетта (см. например [37]). В большинстве задач пористость считается постоянной [13], либо заданной функцией точки [38]. В работах [38, 39] построена теория для системы (1)–(2) в случае зависимости пористости от пространственной переменной. Важным моментом этой теории является доказательство классического принципа максимума для насыщенности $0 \le s \le 1$. Для автомодельной задачи фильтрации воды и воздуха в тающем снеге доказательство принципа максимума сделано в работе [17].

В общем виде коэффициент диффузии D определяется следующим представлением [37]:

$$D = \{D_{ij}\}, \quad D_{ij} = (D_m + \alpha_T v)\delta_{ij} + (\alpha_L - \alpha_T)\frac{v_i v_j}{v},$$

где α_L, α_T — соответственно, продольная и поперечная дисперсия, D_m — коэффициент молекулярной диффузии, δ_{ij} — символ Кронеккера, v — модуль скорости, v_i — компоненты вектора скорости.

5. Алгоритм численного решения одномерной задачи

В одномерном случае система уравнений (1)–(3), (7) примет вид

$$\phi\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}(a(s,\phi)\frac{\partial s}{\partial y} + bv + F) + (1-s)\frac{\partial \phi}{\partial t}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(K\frac{\partial p}{\partial y} + f) = \left(1 - \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}\right)\frac{\partial \phi}{\partial t}, \tag{9}$$

$$\rho_3^0\frac{\partial(\phi)}{\partial t} = I, \tag{10}$$

$$Q(s,\theta)\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}(\lambda_c\frac{\partial \theta}{\partial y}) - V(v_1, v_2)\frac{\partial \theta}{\partial y} - \nu I. \tag{11}$$

$$\phi s\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial y}(D(v_1)\frac{\partial\sigma}{\partial y})+v_1\frac{\partial\sigma}{\partial y}=-S-\sigma\frac{\partial v_1}{\partial y}-\sigma s\frac{\partial\phi}{\partial t}-\sigma\phi\frac{\partial s}{\partial t}, \quad (12)$$

Для системы (8) – (12) в одномерном случае рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$\phi(y,0)=\phi^0(y),\quad s(y,0)=s^0(y),\quad s(0,t)=s_0(t),\quad \frac{\partial s}{\partial y}(l,t)=0,$$

$$p(0,t)=p_0(t),\quad \frac{\partial p}{\partial y}(l,t)=p_l(t),\quad \sigma(y,0)=\sigma^0(y),\quad \sigma(0,t)=\sigma_0(t),\quad \frac{\partial\sigma}{\partial y}(l,t)=0, \quad (13)$$

$$\theta(y,0)=\theta^0(y),\quad \theta(l,t)=\theta_l(t),\quad y\in[0,l].$$

Как правило, при моделирование теплообмена поверхности земли (снежного покрова) [28,40] и водоемов [27,41] с атмосферой на границе раздела поверхности земли и атмосферы (в рассматриваемом случае при $y=0$) задают граничное условие третьего рода:

$$\lambda_c\frac{\partial\theta}{\partial y}-\alpha_c(\theta-\theta_a)=q. \quad (14)$$

Здесь α_c – коэффициент теплообмена, θ_a – температура воздуха, q – заданный поток тепла. При численных исследованиях задачи (8)-(13) с заданным на верхней границе условием (14) (при $y=0$) для коэффициента теплопроводности снега использовалась зависимость (5), следуя работе [31, с. 22] при отсутствии ветра коэффициент теплообмена принят равным $\alpha_c=0.2$ Вт/(м$^2\cdot$ К).

Перейдем к безразмерным переменным

$$\tilde y=\frac{y}{y_{sc}},\quad \tilde t=\frac{t}{t_{sc}},\quad \tilde p=\frac{p}{p_{sc}},\quad \tilde v=\frac{v}{v_{sc}},\quad \tilde\theta=\frac{\theta}{\theta_{sc}},$$

где $y_{sc}=l$, $p_{sc}=\rho_1^0gl$, температура θ_{sc} принимается равной температуре плавления льда, $v_{sc}=B\rho_1^0g/\mu_1$ и характерное время определяется соотношением $t_{sc}=y_{sc}/v_{sc}$. Тогда область изменения y есть единичный отрезок $[0,1]$, а система уравнений (8)-(12) в одномерном случае принимает следующую форму:

$$\phi\frac{\partial s}{\partial\tilde t}=\frac{\partial}{\partial\tilde y}(\tilde a\frac{\partial s}{\partial\tilde y}+b\tilde v+\tilde F)+(1-s)\frac{\partial\phi}{\partial\tilde t},$$

$$\frac{\partial}{\partial\tilde y}(\tilde K\frac{\partial\tilde p}{\partial\tilde y}+\tilde f)=\left(1-\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\tilde t},$$

$$\tilde Q\frac{\partial\tilde\theta}{\partial\tilde t}=\frac{\partial}{\partial\tilde y}(\tilde\lambda_c\frac{\partial\tilde\theta}{\partial\tilde y})-\tilde V\frac{\partial\tilde\theta}{\partial\tilde y}-\chi\tilde I,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tilde t}=\tilde I.$$

$$\phi s\frac{\partial\tilde\sigma}{\partial\tilde t}-\frac{\partial}{\partial\tilde y}(\tilde D\frac{\partial\tilde\sigma}{\partial\tilde y})+\tilde v_1\frac{\partial\tilde\sigma}{\partial\tilde y}=-\tilde S-\tilde\sigma\frac{\partial\tilde v_1}{\partial\tilde y}-\tilde\sigma s\frac{\partial\phi}{\partial\tilde t}-\tilde\sigma\phi\frac{\partial s}{\partial\tilde t},$$

Здесь $\chi=\nu/(c_3\theta_{sc})$ – безразмерная постоянная, $\tilde v=\tilde v_1+\tilde v_2$, $\tilde K=\tilde K_0\tilde k$,

$$\tilde v_1=-\tilde K_0\bar k_{01}(\frac{\partial\tilde p_1}{\partial\tilde y}-1),\ \tilde v_2=-\tilde K_0\frac{\bar k_{02}}{\mu}(\frac{\partial\tilde p_2}{\partial\tilde y}-\frac{\rho_2^0}{\rho_1^0}),\ b(s)=\frac{\bar k_{02}}{\mu\bar k_{01}+\bar k_{02}},\ \mu=\frac{\mu_2}{\mu_1},$$

$$\tilde{a}(s,\phi) = -\tilde{K}_0 \frac{\bar{k}_{01}\bar{k}_{02}}{\mu\bar{k}_{01}+\bar{k}_{02}}\frac{\partial \tilde{p}_c}{\partial s}, \quad \tilde{F} = \tilde{K}_0 \frac{\bar{k}_{01}\bar{k}_{02}(\frac{\rho_2^0}{\rho_1^0}-1)}{\mu\bar{k}_{01}+\bar{k}_{02}}, \quad \tilde{K}_0 = \frac{B\rho_1^0 g}{v_{sc}\mu_1}\frac{\phi^3}{(1-\phi)^2},$$

$$\tilde{f} = -\tilde{K}_0(\bar{k}_{01} + \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0\mu}\bar{k}_{02}), \quad \tilde{Q} = \frac{\rho_1^0 c_1}{\rho_3^0 c_3}s\phi + \frac{c_2\rho_2^0}{c_3\rho_3^0}(1-s)\phi + 1 - \phi, \quad \tilde{k} = \bar{k}_{01} + \frac{\bar{k}_{02}}{\mu},$$

$$\tilde{\lambda}_c = \frac{a_c t_{sc}}{y_{sc}^2\rho_3^0 c_3}(1 + \frac{b_c}{a_c}\rho_c^2), \quad \tilde{V} = \frac{\rho_1^0 c_1}{\rho_3^0 c_3}\tilde{v}_1 + \frac{\rho_2^0 c_2}{\rho_3^0 c_3}\tilde{v}_2, \quad \tilde{I} = \frac{t_{sc}}{\rho_3^0}I, \quad \tilde{D} = \frac{t_{sc}D}{y_{sc}^2}, \quad \tilde{S} = \frac{t_{sc}S}{\rho_4}.$$

Опуская волны, получим

$$\phi\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}(a(s,\phi)\frac{\partial s}{\partial y} + b(s)v + F(s,\phi)) + (1-s)\frac{\partial \phi}{\partial t}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(K(s,\phi)\frac{\partial p}{\partial y} + f(s,\phi)) = \left(1 - \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}\right)\frac{\partial \phi}{\partial t}, \tag{16}$$

$$Q(s,\theta)\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}(\lambda_c\frac{\partial \theta}{\partial y}) - V(v_1,v_2)\frac{\partial \theta}{\partial y} - \chi I, \tag{17}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = I, \tag{18}$$

$$\phi s\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}(D\frac{\partial \sigma}{\partial y}) + v_1\frac{\partial \sigma}{\partial y} = -S - \sigma\frac{\partial v_1}{\partial y} - \sigma s\frac{\partial \phi}{\partial t} - \sigma\phi\frac{\partial s}{\partial t}. \tag{19}$$

Следует отметить, что v является искомой функцией и определяется при решении задачи [19].

Численному исследованию задач фильтрации многофазных смесей в пористых средах с заданной пористостью посвящено множество работ (см., например, [42–45]). Обоснованию приближенных методов решения задач стационарной фильтрации с предельным градиентом посвящены работы А. Д. Ляшко и М. М. Карчевского [44, 45]. В работе Ю. М. Лаевского и соавторов для решения задач фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости используется метод конечных элементов [43]. В работах А. Н. Коновалова (см., например, [42]) исследуются разностные схемы для задач двухфазной фильтрации несжимаемой жидкости. Двумерные модели исследовались в работе [39]. Сравнению моделей фильтрации двухфазных жидкостей и анализу численных методов их решения посвящены работы [46, 47]. В работе [42] численно исследуется фильтрация двухфазной смеси в пористой среде с заданной пористостью (модель Маскета–Леверетта). Существенным отличием моделей исследуемых в данной работе является учет изменения пористости.

Введем сетку с распределенными узлами $y_i = ih, \quad t_n = n\tau; \quad i = 0, ..., N, \quad n = 0, ..., T$, h - шаг по пространственной координате, τ - шаг по времени. При аппроксимации уравнения (15) за основу взята разностная схема используемая в работе [42, с. 102] для модели Маскета–Леверетта с использованием направленной разности для конвективного слагаемого

$$\phi_i^n\frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} = a_{i+1/2}^n\frac{s_{i+1}^{n+1} - s_i^{n+1}}{h^2} - a_{i-1/2}^n\frac{s_i^{n+1} - s_{i-1}^{n+1}}{h^2} + (1 - s_i^n + b(s_i^n) - b(s_i^n)\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0})I_i^n +$$

$$+\frac{(|G_i^n| + G_i^n)s_{i+1}^{n+1} - 2|G_i^n|s_i^{n+1} + (|G_i^n| - G_i^n)s_{i-1}^{n+1}}{2h} + F_{\phi i}^n\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h}. \tag{20}$$

Уравнение (16) аппроксимируется неявной схемой второго порядка точности. В результате получаем систему разностных уравнений:

$$K^n_{i+1/2}\frac{p^n_{i+1}-p^n_i}{h^2}-K^n_{i-1/2}\frac{p^n_i-p^n_{i-1}}{h^2}+f^n_{si}\frac{s^n_{i+1}-s^n_{i-1}}{2h}+ \tag{21}$$

$$+f^n_{\phi i}\frac{\phi^n_{i+1}-\phi^n_{i-1}}{2h}=\left(1-\frac{\rho^0_3}{\rho^0_1}\right)I^n_i.$$

При аппроксимации уравнений для температуры (17) и концентрации примеси (19) используется направленная разность для конвективных слагаемых, разностная схема имеет вид:

$$Q(s^n_i,\phi^n_i)\frac{\theta^{n+1}_i-\theta^n_i}{\tau}=\frac{1}{h^2}(\lambda^n_{ci+\frac{1}{2}}(\theta^{n+1}_{i+1}-\theta^{n+1}_i)-\lambda^n_{ci-\frac{1}{2}}(\theta^{n+1}_i-\theta^{n+1}_{i-1}))- \tag{22}$$

$$-\frac{(|V^n_i|+V^n_i)\theta^{n+1}_{i+1}-2|V^n_i|\theta^{n+1}_i+(|V^n_i|-V^n_i)\theta^{n+1}_{i-1}}{2h}-\chi I^n_i,$$

$$\phi^n_i s^n_i\frac{\sigma^{n+1}_i-\sigma^n_i}{\tau}-D^n_{i+1/2}\frac{\sigma^{n+1}_{i+1}-\sigma^{n+1}_i}{h^2}+D^n_{i-1/2}\frac{\sigma^{n+1}_i-\sigma^{n+1}_{i-1}}{h^2}+$$

$$+\frac{(|v^n_{1i}|+v^n_{1i})\sigma^{n+1}_{i+1}-2|v^n_{1i}|\sigma^{n+1}_i+(|v^n_{1i}|-v^n_{1i})\sigma^{n+1}_{i-1}}{2h}= \tag{23}$$

$$=-S^n_i-\sigma^n_i\frac{v^n_{1i+1}-v^n_{1i-1}}{2h}-\sigma^n_i s^n_i\frac{\phi^{n+1}_i-\phi^n_i}{\tau}-\sigma^n_i\phi^n_i\frac{s^{n+1}_i-s^n_i}{\tau}.$$

Уравнение (18) аппроксимируется неявной схемой Рунге-Кутты второго порядка точности. Причем найденное на первом этапе значение $\widetilde{\phi}^{n+1}_i$

$$\widetilde{\phi}^{n+1}_i=\phi^n_i+\tau I^n_i, \tag{24}$$

затем уточняется следующим образом:

$$\phi^{n+1}_i=\phi^n_i+\tau\frac{I(\phi^n_i,s^n_i)+I(\widetilde{\phi}^n_i,s^n_i)}{2}. \tag{25}$$

Здесь $i=1,...,N-1$, $\tau=0,...,T-1$,

$$a^n_{i-1/2}=\frac{2a(s^n_{i-1},\phi^n_{i-1})a(s^n_i,\phi^n_i)}{a(s^n_{i-1},\phi^n_{i-1})+a(s^n_i,\phi^n_i)},\quad a^n_{i+1/2}=\frac{2a(s^n_{i+1},\phi^n_{i+1})a(s^n_i,\phi^n_i)}{a(s^n_{i+1},\phi^n_{i+1})+a(s^n_i,\phi^n_i)},$$

$$F^n_{si}=\frac{\partial F}{\partial s}(s^n_i,\phi^n_i),\quad F^n_{\phi i}=\frac{\partial F}{\partial\phi}(s^n_i,\phi^n_i),\quad f^n_{si}=\frac{\partial f}{\partial s}(s^n_i,\phi^n_i),\quad f^n_{\phi i}=\frac{\partial f}{\partial\phi}(s^n_i,\phi^n_i),$$

$$G^n_i=\frac{\partial F}{\partial s}(s^n_i,\phi^n_i)+v^n_i\frac{\partial b}{\partial s}(s^n_i),$$

$$K^n_{i-1/2}=\frac{2K(\phi^n_{i-1},s^n_{i-1})K(\phi^n_i,s^n_i)}{K(\phi^n_{i-1},s^n_{i-1})+K(\phi^n_i,s^n_i)},\quad K^n_{i+1/2}=\frac{2K(\phi^n_{i+1},s^n_{i+1})K(\phi^n_i,s^n_i)}{K(\phi^n_{i+1},s^n_{i+1})+K(\phi^n_i,s^n_i)},$$

$$\lambda^n_{ci-\frac{1}{2}}=\frac{2\lambda_c(\phi^n_{i-1},s^n_{i-1})\lambda_c(\phi^n_i,s^n_i)}{\lambda_c(\phi^n_{i-1},s^n_{i-1})+\lambda_c(\phi^n_i,s^n_i)},\quad \lambda_{ci+\frac{1}{2}}=\frac{2\lambda_c(\phi^n_{i+1},s^n_{i+1})\lambda_c(\phi^n_i,s^n_i)}{\lambda_c(\phi^n_{i+1},s^n_{i+1})+\lambda_c(\phi^n_i,s^n_i)},$$

$$D^n_{i-1/2}=\frac{2D(v^n_{1i-1})D(v^n_{1i})}{D(v^n_{1i-1})+D(v^n_{1i})},\quad D^n_{i+1/2}=\frac{2D(v^n_{1i+1})D(v^n_{1i})}{D(v^n_{1i+1})+D(v^n_{1i})}.$$

Алгоритм численного решения начально-краевой задачи следующий: используя начальное значение пористости ϕ_i^0, температуры θ_i^0 и концентрации s_i^0, находим начальное распределение приведенного давления p_i^0 $(i = 0, ..., N)$ из уравнения (21). Используя найденное давление, определяем скорость фильтрации v_i^0. Из равенства (22) находим температуру θ_i^1 на следующем шаге по времени. Из равенства (24) находим пористость грунта ϕ_i^1 на следующем шаге по времени. Из уравнения (20) находим концентрацию воды s_i^1. Рассчитываем давление на следующем шаге по времени $(n = 1)$. Используя найденные значения искомых функций $\widetilde{\phi}_i^1$, s_i^1, p_i^0, p_i^1, θ_i^1 делаем коррекцию значения пористости на первом шаге по времени, используя формулу (25). Используя найденные скорости фильтрации и водонасыщенность из уравнения (23) находим распределение концентрации примеси σ_i^1 в тающем снеге. Повторяя данный алгоритм для следующих шагов по времени, найдем значения искомых функций на всем временном интервале.

На рисунке 2 приведено изменение концентрации соли в тающем снеге. В численных расчетах использовался набор модельных параметров из работы [19].

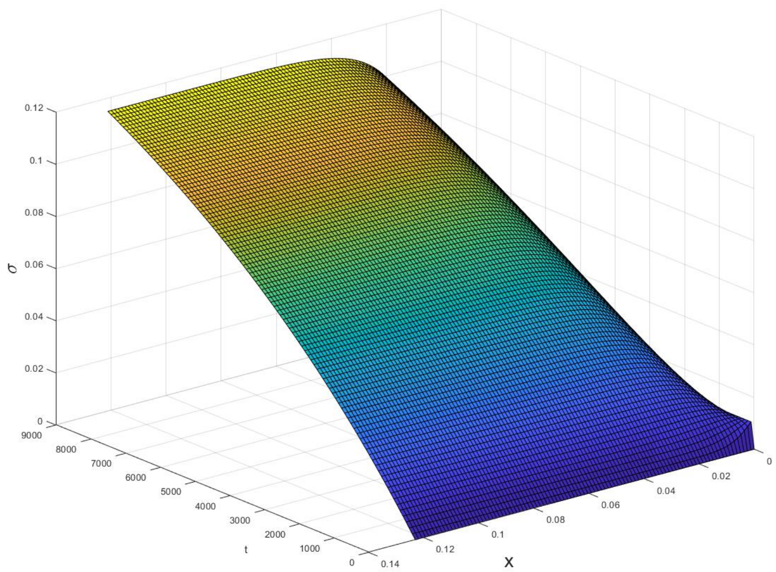

Рисунок 2. Рассчитанные значения концентрации консервативной примеси в тающем снеге.

6. Заключение

Построена математическая модель движния консервативной примеси в тающем снеге. В рамках полученной модели численно решена одномерная задача фильтрации воды и воздуха в тающем снеге, исследовано изменение концентрации соли в тающем снеге. Используя экспериментальные данные из литературных источников проведена верификация коэффициента теплопроводности снега.

Список литературы

1. Lee J., Feng X., Posmentier E.S. et al. Modeling of solute transport in snow using conservative tracersand artificial rain-on-snow experiments // Water Resources Research. — 2008. — Vol. 44, W02411.

2. Singh P. Snow and Glacier Hydrology. — Netherlands : Springer, 2001. — 756 p.

3. Papina T.S., Eirikh A.N., Malygina N.S. et al. Microelement and stable isotopic composition of snowpack in the Katunsky Biosphere Reserve (Altai Republic) // Ice and Snow. — 2018. — Vol. 58, no. 1. — P. 41–55.

4. Feng X., Kirchner J.W., Renshaw C.E. et al. A study of solute transport mechanisms using rare earth element tracers and artificial rainstorms on snow // Water Resources Research. — 2001. — Vol. 37, no. 1. — P. 1425–1435.

5. Lehning M., Bartelt P., Brown B. et al. A physical SNOWPACK model for the Swiss avalanche warning Part II: Snow microstructure // Cold Regions Science and Technology. — 2002. — Vol. 35. — P. 147–167.

6. Vionnet V. et al. The detailed snowpack scheme Crocus and its implementation in SURFEX v7.2 // Geosci. Model Dev. — 2012. — Vol. 5. — P. 773–791.

7. Bizzotto E.C., Villa S., Vaj C., Vighi M. Comparison of glacial and non-glacial-fed streams to evaluate the loading of persistent organic pollutants through seasonal snow/ice melt // Chemosphere. — 2009. — Vol. 74. — P. 924–930.

8. Meyer T. et al. Organic contaminant release from melting snow: influence of chemical partitioning // Environ. Sci. Technol. — 2009. — Vol. 43. — P. 657–662.

9. Waldner P.A., Schneebeli M., Schultze-Zimmermann U., Fluhler H. Effect of snow structure on water flow and solute transport // Hydrological processes. — 2008. — Vol. 18, no. 7. — P. 1271–1290.

10. Wever N. et al. Verification of the multi-layer SNOWPACK model with different water transport schemes // The Cryosphere. — 2015. — Vol. 9. — P. 2271–2293.

11. Meyer T., Wania F. Modeling the elution of organic chemicals from a melting homogeneous snow pack // Water Research. — 2011. — Vol. 45. — P. 3627–3637.

12. Leroux N.R., Pomeroy J.W. A 2D model for simulating heterogeneous mass and energy fluxes through melting snowpacks // Manuscript under review for journal The Cryosphere. — 2016. — P. 26.

13. Colbeck S.C. A theory of water percolation in snow // Journal Glaciol. — 1972. — Vol. 11, no. 63. — P. 369–385.

14. Gray J.M.N.T. Water movement in wet snow // Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 1996. — Vol. 354, no. 1707. — P. 465–500.

15. Sellers S. Theory of water transport in melting snow with a moving surface // Cold Regions Science and Technology. — 2000. — Vol. 2000, no. 31. — P. 47–57.

16. Daanen R.P., Nieber J.L. Model for coupled liquid water flow and heat transport with phase change in a snowpack // Journal of Cold Regions Engineering. — 2009. — Vol. 23, no. 2. — P. 43–68.

17. Папин А.А. Разрешимость модельной задачи тепломассопереноса в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. — 2008. — Т. 49, № 4. — С. 13–23.

18. Papin A.A., Tokareva M.A. Problems of heat and mass transfer in the snow-ice cover // Polar Mechanics 2018. IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. — 2018. — Vol. 193. — P. 1–8.

19. Сибин А.Н., Папин А.А. Тепломассоперенос в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. — 2021. — Т. 62, № 1. — С. 109–118.

20. Sibin A.N., Papin A.A. Water movement in melting snow // J. Phys.: Conf. Ser. — 2021. — Vol. 2057, 012030.

21. Кучмент Л.С. Формирование речного стока. Физико-математические модели. — М. : Наука, 1983.

22. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Часть 1. — М. : Наука, 1987. — 464 с.

23. Thorpe A.D., Mason B.J. The evaporation of spheres and ice crystals // Br. J. Appl. Phys. — 1996. — Vol. 17. — P. 541–548.

24. Бондарев Э.А. Температурный режим нефтяных и газовых скважин. — Новосибирск : Наука, 1974.

25. Колесников А.Г. К изменению математической формулировки задачи о промерзании грунта // Доклады Академии Наук СССР. — 1952. — Т. 82, № 6. — С. 889–891.

26. Нерсесова З.А. Изменение льдистости грунтов в зависимости от температуры // ДАН СССР. — 1950. — Т. 75, № 6. — С. 845–846.

27. Белолипецкий В.М., Генова С.Н., Туговиков В.Б., Шокин Ю.И. Численное моделирование задач гидроледотермики водотоков. — Новосибирск : СО РАН Инситут вычислительных технологий, 1993. — 138 с.

28. Красс М.С., Мерзликин В.Г. Радиационная теплофизика снега и льда. — Л. : Гидрометеоиздат, 1990. — 261 с.

29. Bouguer P. Essai d'Optique, sur la gradation de la lumiere. — Paris : Claude Jombert, 1729.

30. Кучмент Л.С. Речной сток (генезис, моделирование, предвычисление). — М., 2008. — 394 с.

31. Павлов А.В. Теплофизика ландшафтов. — Новосибирск : Наука, 1979. — 284 с.

32. Чернов Р.А. Экспериментальное определение эффективной теплопроводности глубинной изморози // Лёд и Снег. — 2013. — Т. 53, № 3. — С. 71–77.

33. Кутателадзе С.С. Справочник по теплопередаче. — М. : Гос. энергетическое издательство, 1958. — 334 с.

34. Папин А.А., Сибин А.Н. Моделирование движения смеси твердых частиц и жидкости в пористых средах с учетом внутренней суффозии // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. — 2019. — № 4. — С. 82–94.

35. van Genuchten T.M. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // Soil Sci. Soc. Am. J. — 1980. — Vol. 44, no. 5. — P. 892–898.

36. Shimizu H. Air permeability of deposited snow. — Sapporo, Japan : Institute of Low Temperature Science, 1969.

37. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. — М., 1971.

38. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. — Новосибирск : Наука, 1983. — 320 с.

39. Жумагулов Б.Т., Монахов В.Н. Гидродинамика нефтедобычи. — Алматы : КазгосИНТИ, 2001. — 336 с.

40. Будыко М.И. Тепловой баланс земной поверхности. — Л. : Гидрометеоиздат, 1956. — 255 с.

41. Бекежанова В.Б. Устойчивость неизотермических жидкостей в различных моделях конвекции: дис. ... д-р физ.-мат. наук: 01.02.05. — Красноярск : Ин-т вычислительного моделирования СО РАН, 2015. — 268 с.

42. Коновалов А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. — Новосибирск : Наука, 1988. — 166 с.

43. Лаевский Ю.М., Попов П.Е., Калинкин А.А. Моделирование фильтрации двухфазной жидкости смешанным методом конечных элементов // Матем. моделирование. — 2010. — Т. 22, № 3. — С. 74–90.

44. Ляшко А.Д., Карчевский М.М. Разностные методы решения нелинейных задач теории фильтрации // Изв. вузов. Матем. — 1983. — № 7. — С. 28–45.

45. Ляшко А.Д., Карчевский М.М., Павлова М.Ф. Разностные схемы для задач фильтрации с предельным градиентом. — Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1985. — 121 с.

46. Бочаров О.Б., Телегин И.Г. Сравнение модели фильтрации несмешивающихся жидкостей с фазовыми подвижностями с моделью Маскста Леверетта // Теплофизика и Аэромеханика. — 2004. — Т. 11, № 4. — С. 597–605.

47. Телегин И.Г. Численное исследование задач фильтрации несмешивающихся жидкостей: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. — Горно-Алтайск : Горно-Алтайский государственный университет, 2005. — 127 с.