УДК 517

Из опыта проведения геометрического практикума в научно-исследовательской работе старшеклассников и студентов

Саженков А.Н., Саженкова Т.В.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
sazhenkov_ an@mail.ru

Аннотация

В работе представлен набор задач творческого характера по одной из тем геометрического практикума, решение которых направлено на развитие аналитических качеств и способствующих самостоятельному продвижению учащихся в исследовательской работе.

Ключевые слова: геометрические задачи, развитие аналитических качеств, научно-исследовательская работа старшеклассников и студентов младших курсов.

В проведении регулярной факультативной и кружковой работы с учащимися различных образовательных ступеней, а также на различного уровня сборах по подготовке к тем или иным математическим соревнованиям, решение геометрических задач даёт замечательную возможность выработки у учащихся хорошего логического и последовательного мышления. Геометрические рассуждения по определённым правилам, отражающим рассматриваемые закономерности, позволяют последовательно объединять в себе несколько соображений-идей. Последовательное увеличение количества условий и требований к рассматриваемым объектам даёт возможность демонстрировать востребованность ранее полученных результатов и успешно продвигаться в исследованиях к итоговому результату [1–4].

Рассмотрим возможность такого последовательного вовлечения получаемых результатов на примере ряда геометрических задач по теме "Теорема Хелли и её приложение" – одной из классических геометрических тем.

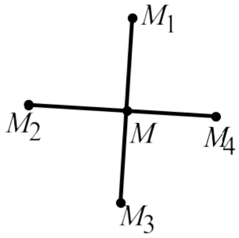
Теорема Хелли. На плоскости дано конечное множество выпуклых множеств, каждые три из которых имеют общую точку. Тогда и все эти множества имеют общую точку.

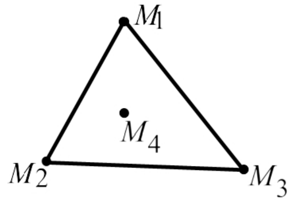
Доказательство. Поставим индукцию: на плоскости дано k выпуклых множеств, каждые три из которых имеют общую точку. Тогда и все k множеств имеют общую точку.

База. $k = 3$. Очевидно, выполняется.

Индукционный переход делаем такой: $k \Rightarrow k + 1$.

Пусть A_1, A_2, ..., A_{k+1} – данные множества. Каждые k из них пересекаются. Докажем, что пересекаются все $k + 1$ множеств.





Обозначим через M_i произвольную точку, лежащую в пересечении всех множеств, кроме i-того.

Рассмотрим расположение первых четырех точек: M_1, M_2, M_3 и M_4. Выделим два возможных расположения:

В первом случае M принадлежит всем $k+1$ множествам, во втором – M_4. И остаётся два совсем вырожденных случая. Таким образом, учащимся представлена и теорема Хелли, и сам метод её применения, который фактически представлен в её обосновании.

Далее приведём несколько примеров применения изложенного факта.

Пример 1. На плоскости даны несколько точек, любые три из которых можно накрыть кругом радиуса 1. Доказать, что и все эти точки можно накрыть таким кругом.

Рассмотрим 3 точки из этого множества. Они накрываются кругом радиуса 1. Пусть центр этого круга – точка A. Теперь рассмотрим круги с центрами в данных трёх точках радиуса 1. Они будут содержать точку A.

Значит отсюда следует, что любые три круга пересекаются. Завершает доказательство применение теоремы Хелли.

Пример 2. (Теорема Юнга). На плоскости даны несколько точек, расстояние между любыми двумя из которых не превосходит 1. Доказать, что все эти точки можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Рассмотрим круги с центрами в данных точках радиуса R. Поставим вопрос, при каких значениях R любые три круга пересекаются? Эквивалентной задачей является следующая: стороны треугольника не больше 1, найти максимально возможный радиус описанной окружности. Поскольку один из углов треугольника не меньше $\frac{\pi}{3}$, пусть это угол α из теоремы синусов получаем оценку $R = \frac{a}{2\sin\alpha} \leq \frac{1}{2\cdot\left(\sqrt{3}/2\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Пример 3. Дан выпуклый многоугольник. Известно, что для любых трёх его сторон можно выбрать точку О внутри многоугольника так, что перпендикуляры, опущенные из точки О на эти три стороны, попадают на сами стороны, а не на их продолжения. Докажите, что тогда такую точку О можно выбрать для всех сторон одновременно.

Для каждой стороны AB данного многоугольника рассмотрим полосу, ограниченную перпендикулярами к прямой AB, проведёнными через точки A и B. К этому набору выпуклых фигур добавим ещё и сам многоугольник. По условию любые три из этих фигур имеют общую точку. Поэтому по теореме Хелли все они имеют общую точку.

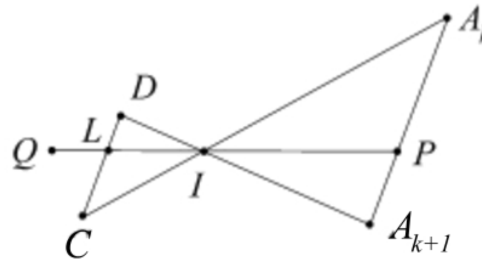
Пример 4. На плоскости даны несколько прямоугольников, у которых стороны параллельны двум заданным взаимно перпендикулярным прямым. При этом любые два прямоугольника имеют общую точку. Доказать, что и все эти прямоугольники имеют общую точку.

Введём декартову систему координат с осями параллельными сторонам прямоугольников. Ортогональной проекцией любого прямоугольника на ось будет отрезок. Пусть Π – прямоугольник, отрезок $[a, b]$ – его проекция на ось абсцисс, $[c, d]$ – на ось ординат. Тогда точка с координатами (x, y) принадлежит прямоугольнику, если и только если выполняются оба неравенства: $a \leq x \leq b$ и $c \leq y \leq d$. Теперь заметим, что любые три прямоугольника Π_1, Π_2 и Π_3 пересекаются. Действительно, если $\max\{a_1, a_2, a_3\} = a_i$, $\min\{b_1, b_2, b_3\} = b_j$ и $a_i > b_j$, то прямоугольники Π_i и Π_j не пересекаются. Значит, существует x удовлетворяющий неравенству $a_i \leq x \leq b_i$ $i = 1, 2, 3$. Аналогично замечается существование y, удовлетворяющего неравенству $c_i \leq x \leq d_i$ $i = 1, 2, 3$. Завершает доказательство применение теоремы Хелли.

Пример 5. Дан выпуклый многоугольник M. Докажите, что внутри него найдётся точка I, такая, что для любой хорды PQ, содержащей точку I, выполняется неравенство:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{QI}{IP} \leq 2.$$

Обозначим M_k образ многоугольника M при гомотетии с центром в вершине A_k многоугольника M и коэффициентом $\frac{2}{3}$. Во-первых, $M_k \subset M$, во-вторых, все стороны M_k, не содержащие точку A_k, лежат внутри многоугольника M.



Обозначим N – пересечение всех многоугольников M_k. Множество N – не пусто. Действительно, не трудно заметить, что для любых трёх многоугольников M_i, M_j, M_l они содержат точку пересечения медиан треугольника $A_iA_jA_l$. По теореме Хелли получаем, что $N \neq \emptyset$. Пусть $I \in N$, точка I содержится в M и не лежит ни на одной из сторон, следовательно, она внутри M.

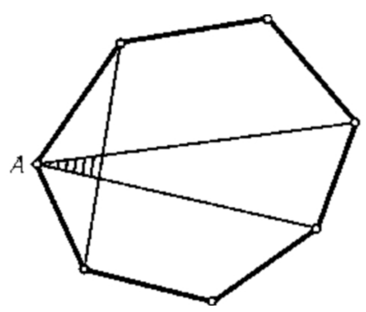
Пусть хорда PQ проходит через точку I, точка P лежит на стороне A_kA_{k+1}. По построению, найдутся точки D и C многоугольника M, такие, что $DI : IA_{k+1} = CI : IA_k = 1 : 2$. На отрезке PQ найдётся точка L, лежащая, одновременно на отрезке CD, такая, что $LI : IP = 1 : 2$. Отсюда, $\frac{QI}{IP} \geq \frac{LI}{IP} \geq \frac{1}{2}$.

Примером, показывающим неулучшаемость оценки, является треугольник. С одной стороны, точкой I в треугольнике служит точка пересечения медиан. С другой стороны, если I – другая точка, то легко построить хорду, не удовлетворяющую неравенству.

Пример 6. На плоскости заданы несколько полуплоскостей, которые покрывают всю плоскость. Доказать, что из этих полуплоскостей можно выбрать три, которые тоже покрывают всю плоскость.

Рассмотрим дополнения полуплоскостей, ими будут замкнутые полуплоскости. Для дополнений условие означает тот факт, что они имеют пустое пересечение. Если предположить, что никакие три полуплоскости не покрывают всю плоскость, то для дополнений это означает, что любые три замкнутые полуплоскости пересекаются. Тогда и все пересекаются, а их дополнения – сами полуплоскости не покрывают всю плоскость.

Пример 7. Докажите, что внутри любого выпуклого семиугольника есть точка, не принадлежащая ни одному из четырёхугольников, образованных четвёрками его соседних вершин.



Рассмотрим пятиугольники, остающиеся при выбрасывании пар соседних вершин семиугольника (рассматриваем многоугольники без границы). Достаточно проверить, что любые три из них имеют общую точку. Для трех пятиугольников выбрасывается не более шести различных вершин, т. е. одна вершина остается. Если вершина A не выброшена, то заштрихованный на рисунке треугольник принадлежит всем трем пятиугольникам.

Список литературы

1. Плотникова Е.А., Саженков А.Н., Саженкова Т.В. Математический анализ в задачах студенческих олимпиад. Практикум. — Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2011.

2. Саженков А.Н. Геометрия и анализ в задачах математических олимпиад // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — 2013. — № 1.

3. Плотникова Е.А., Саженков А.Н., Саженкова Т.В. О геометрическом и функционально-графическом содержании студенческого олимпиадного факультатива-практикума // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — 2019. — № 5. — С. 134–136.

4. Плотникова Е.А., Саженков А.Н. О линейном движении геометрических объектов // Сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием МАК-2020. — Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2020.