УДК 519.67

О сферическом изображении кубических поверхностей вращения средствами MatLab

Самыкова А.А., Хромова О.П.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
a_samykova@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com

Аннотация

В работе построены сферические изображения кубических поверхностей вращения. Написана программа на языке MatLab, которая визуализирует процесс построения сферического образа.

Ключевые слова: поверхность вращения третьего порядка, сферическое изображение, MatLab.

1. Предварительные сведения

Гауссово сферическое отображение поверхности играет важную роль в изучении свойств поверхностей [1–4]. В частности, интересным представляется исследование сферического отображения поверхностей третьего порядка, поскольку они выступают в качестве составных элементов так называемых сплайнов, которые весьма востребованы в современных инженерных и дизайнерских практиках [5].

Класс кубических поверхностей достаточно широк, поэтому в настоящей работе речь пойдет только о поверхностях вращения третьего порядка и их сферических изображениях, для поиска которых будут привлекаться системы компьютерной математики, хорошо зарекомендовавшие себя при решении научно-практических задач.

Определение 1. *Поверхность третьего порядка – это геометрическое место точек трёхмерного пространства, прямоугольные координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению третьего порядка:*

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 + Dx^2y + Ex^2z + Fy^2x + Gy^2z + Hz^2x + Iz^2y + Jxyz+ \\ + Kx^2 + Ly^2 + Mz^2 + Nxy + Oxz + Pyx + Qx + Ry + Sz + T = 0,$$

в котором по крайне мере один из коэффициентов $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ отличен от нуля.

Теорема 1. *[6]. Каждая кривая третьего порядка с помощью аффинного преобразования приводится к одной из следующих канонических форм:*

1. $(x + a)(x^2 + y^2 - 1) + bc + c = 0,$
2. $(x + a)(x^2 + y^2 + 1) + bc + c = 0,$
3. $(x + a)(x^2 + y^2) + bc + c = 0,$
4. $(x + a)(x^2 - y^2 - 1) + bc + c = 0,$
5. $(x + a)(x^2 - y^2 + 1) + bc + c = 0,$

6. $(x+a)(x^2-y^2)+bc+c=0,$

7. $(x+a)(x^2-2y)+bc+c=0,$

8. $(x+a)(y^2-2x)+bc+c=0,$

9. $(x+a)(y^2-1)+bc+c=0,$

10. $(x+a)(y^2+1)+bc+c=0,$

11. $(x+a)y^2+bc+c=0,$

12. $(x+a)(x^2-1)+bc+c=0,$

13. $(x+a)(x^2+1)+bc+c=0,$

14. $(x+a)x^2+bc+c=0,$

15. $y^2=x^3+bc+c,$

где a, b, c – произвольные вещественные константы.

Теорема 2. *[7]. Всякая поверхность вращения третьего порядка в некоторой прямоугольной системе координат определяется одной следующих канонических форм*

$$(x+a)(x^2+y^2+z^2-1)+c=0, \tag{1}$$
$$(x+a)(x^2+y^2+z^2+1)+c=0, \tag{2}$$
$$(x+a)(x^2+y^2+z^2)+c=0, \tag{3}$$
$$(x+a)(x^2-y^2-z^2-1)+c=0, \tag{4}$$
$$(x+a)(x^2-y^2-z^2+1)+c=0, \tag{5}$$
$$(x+a)(x^2-y^2-z^2)+c=0, \tag{6}$$
$$(x+a)(y^2+z^2-2x)+c=0, \tag{7}$$
$$(x+a)(y^2+z^2-1)+c=0, \tag{8}$$
$$(x+a)(y^2+z^2+1)+c=0, \tag{9}$$
$$(x+a)(y^2+z^2)+c=0, \tag{10}$$
$$y^2+z^2=x^3+bx+c, \tag{11}$$

где a, b, c – произвольные вещественные константы.

Определим сферическое изображение поверхности. Для этого проведем через центр некоторого единичного шара прямые, параллельные нормалям рассматриваемой поверхности. Примем одно из двух направлений нормали к поверхности в некоторой точке за положительное и распространим это соглашение о направлении нормали на все соседние точки нашего куска поверхности. Если теперь мы выберем такое же направление и на соответствующем диаметре шара, то каждой точке куска поверхности будет соответствовать определенная точка на поверхности шара, а именно конец диаметра; таким образом поверхность будет отображена на шар [1].

Образы множеств точек при гауссовом отображении называются сферическими изображениями [8].

Если поверхность задана общим уравнением:

$$F(x,y,z)=0,$$

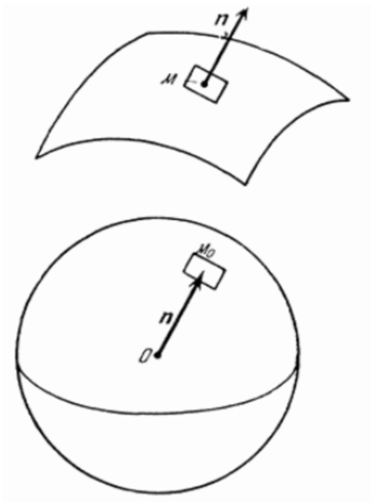

Рисунок 1. Сферическое изображение поверхности

и выбрана произвольная точка на поверхности

$$P = (x_0, y_0, z_0) \in F,$$

то вектор нормали к поверхности F в точке P определяется как

$$\overrightarrow{N} = \{F_x(P), F_y(P), F_z(P)\},$$

где

$$F_x(P) = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_y(P) = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_z(P) = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Обозначим через $\vec{n}$ единичный вектор нормали, т.е.

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{N}}{\left|\overrightarrow{N}\right|}.$$

Таким образом, множество концов всех векторов $\vec{n}$ будут являться сферическим изображением определённой поверхности третьего порядка.

2. Векторы нормали для поверхностей вращения третьего порядка

Итак, пусть мы находимся в условиях теоремы 2. Поскольку построение в дальнейшем будет проводиться в среде MatLab, то следует положить величины a, b, c равным константам. Возьмем их, например, равными единице.

Пример 1. *Вектор нормали поверхности* (10).

Рассмотрим каноническое уравнение (10), *соответствующее 10-му типу поверхности вращения третьего порядка:*

$$(x + a)(y^2 + z^2) + c = 0.$$

Для удобства полагаем $a, c = 1$. *Тогда*

$$F = (x + 1)(y^2 + z^2) + 1 = 0.$$

Найдём частные производные по x, y, z

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 + z^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y(x+1), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z(x+1).$$

Таким образом,

$$\overrightarrow{N} = \left\{y^2 + z^2; 2y(x+1); 2z(x+1)\right\}.$$

Следовательно, единичный вектор нормали имеет вид

$$\vec{n} = \left\{\frac{y^2+z^2}{\left|\overrightarrow{N}\right|}; \frac{2y(x+1)}{\left|\overrightarrow{N}\right|}; \frac{2z(x+1)}{\left|\overrightarrow{N}\right|}\right\}, \tag{12}$$

где $\left|\overrightarrow{N}\right| = \sqrt{(y^2+z^2)^2 + 4(y^2+z^2)(x+1)^2}$.

Пример 2. *Вектор нормали поверхности* (11).

Рассмотрим каноническое уравнение (11)*, соответствующее 11-му типу поверхности вращения третьего порядка:*

$$y^2 + z^2 = x^3 + bx + c.$$

Для удобства возьмём $b, c = 1$. *Тогда*

$$F = y^2 + z^2 - x^3 - x - 1 = 0.$$

Найдём частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -3x^2 - 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z.$$

Выразим z из уравнения

$$z = \pm\sqrt{x^3 + x - y^2 + 1}.$$

Тогда вектор будет иметь координаты

$$\overrightarrow{N} = \left\{-3x^2 - 1; 2y; \pm 2\sqrt{x^3 + x - y^2 + 1}\right\}.$$

Следовательно, единичный вектор нормали для 11 типа поверхности имеет вид

$$\vec{n} = \left\{\frac{-3x^2-1}{\left|\overrightarrow{N}\right|}; \frac{2y}{\left|\overrightarrow{N}\right|}; \frac{\pm 2\sqrt{x^3+x-y^2+1}}{\left|\overrightarrow{N}\right|}\right\}, \tag{13}$$

где $\left|\overrightarrow{N}\right| = \sqrt{9x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5}$.

3. Построение сферического изображения в Matlab

MatLab – это язык высокого уровня и интерактивная среда для программирования, численных расчетов и визуализации результатов. Простой встроенный язык программирования позволяет легко создавать свои собственные алгоритмы, модели и приложения [9].

Одну из особенностей MatLab – визуализацию данных, которая представляет собой набор встроенных функций построения 2D и 3D графиков, мы можем использовать и как средство представления обрабатываемой информации. При этом графики могут быть созданы как интерактивно, так и программно. В галерее графиков MatLab есть примеры множества способов представления данных графически [3, 10].

Программа по построению сферического изображения поверхностей вращения третьего порядка снабжена графическим пользовательским интерфейсом, в котором реализованы следующие функции (рисунок 2):

1. выбор поверхности вращения третьего порядка для её сферического изображения;
2. текстовые поля с формулами канонических уравнений поверхностей вращения третьего порядка соответственно.

Для реализации такого интерфейса, была использована среда MatLab – GUIDE.

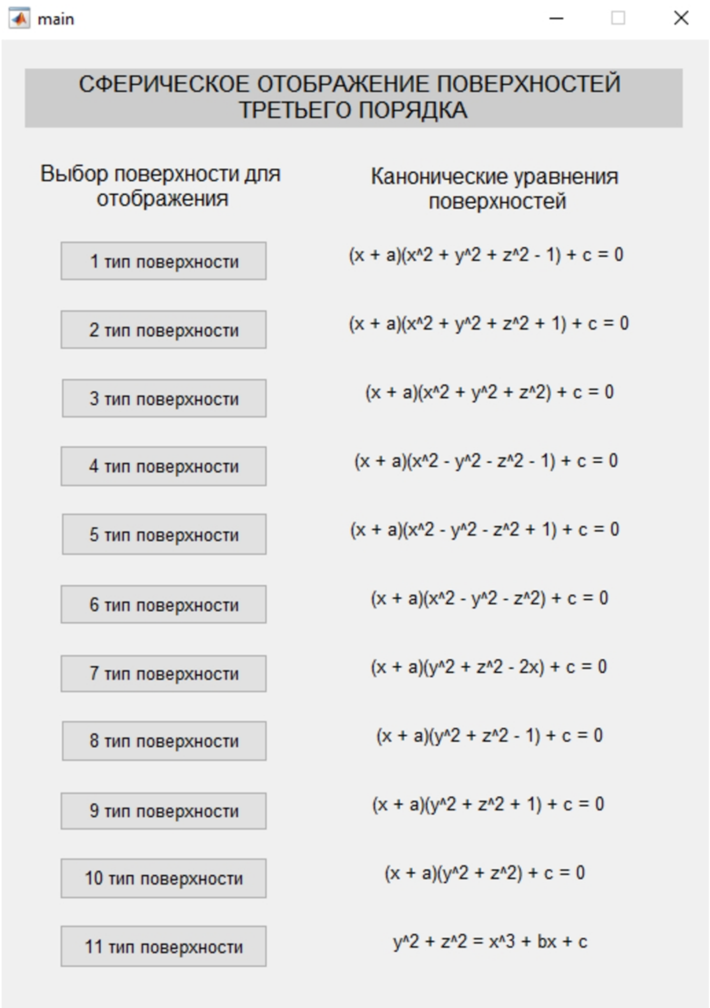

Рисунок 2. Пользовательский интерфейс программы

Алгоритм программы, выполняющий построение сферического изображения, состоит из следующих этапов.

- Генерация трёх массивов x, y, z, элементами которых являются случайные величины, распределенные по равномерному закону с математическим ожиданием 0 и среднеквадратическим отклонением 1, используя функцию `rand(1)`.
- Создание цикла из 1000 итераций с шагом 1, в котором будут вычислены координаты вектора n по формулам, выведенными в (12), (13). Если тройка координат будет удовлетворять условию, которое было также выведено в формулах (12), (13), то эта точка будет построена, используя функцию `plot3`, иначе пропускаем и продолжаем итерацию.
- Построение единичной сферы на том же графике, на котором строились точки – таким образом мы получаем искомое сферическое изображение поверхности.

Для удобства, были созданы файлы с функцией построения сферического изображения для каждой поверхности.

Пример 3. *Код программы, который реализует визуальное представление сферического изображения 10 типа поверхности вращения третьего порядка*

```
Файл ten_type.m
function [ ] = ten_type()  %ф-ция для 10 типа поверхности
for i=1:1:1000
 x(i)=rand(1);
 y(i)=rand(1);
 z(i)=rand(1);
end
for i=1:1:500
 x1(i)= (y(i)^2 + z(i)^2)/(4*(y(i)^2 + z(i)^2)*(x(i) + 1)^2 + (y(i)^2 + z(i)^2)^2)^(1/2);
 y1(i)= (2*y(i)*(x(i)+1))/(4*(y(i)^2 + z(i)^2)*(x(i) + 1)^2 + (y(i)^2 + z(i)^2)^2)^(1/2);
 z1(i)= -(2*z(i)*(x(i)+1))/(4*(y(i)^2 + z(i)^2)*(x(i) + 1)^2 + (y(i)^2 + z(i)^2)^2)^(1/2);
 if ( 4*(y1(i)^2 + z1(i)^2)*(x1(i) + 1)^2 + (y1(i)^2 + z1(i)^2)^2 > 0 )
 figure(10);
 plot3(x1(i),y1(i),z1(i),’* k’ );
 hold on;
 end
end
for i=501:1:1000
 x1(i)= (y(i)^2 + z(i)^2)/(4*(y(i)^2 + z(i)^2)*(x(i) + 1)^2 + (y(i)^2 + z(i)^2)^2)^(1/2);
 y1(i)= (2*y(i)*(x(i)+1))/(4*(y(i)^2 + z(i)^2)*(x(i) + 1)^2 + (y(i)^2 + z(i)^2)^2)^(1/2);
 z1(i)= (2*z(i)*(x(i)+1))/(4*(y(i)^2 + z(i)^2)*(x(i) + 1)^2 + (y(i)^2 + z(i)^2)^2)^(1/2);
 if ( 4*(y1(i)^2 + z1(i)^2)*(x1(i) + 1)^2 + (y1(i)^2 + z1(i)^2)^2 > 0 )
 figure(10);
 plot3(x1(i),y1(i),z1(i),’* k’ );
 hold on;
 end
end
figure(10);
sphere;
xlabel(’x’); ylabel(’y’); zlabel(’z’)
end
```

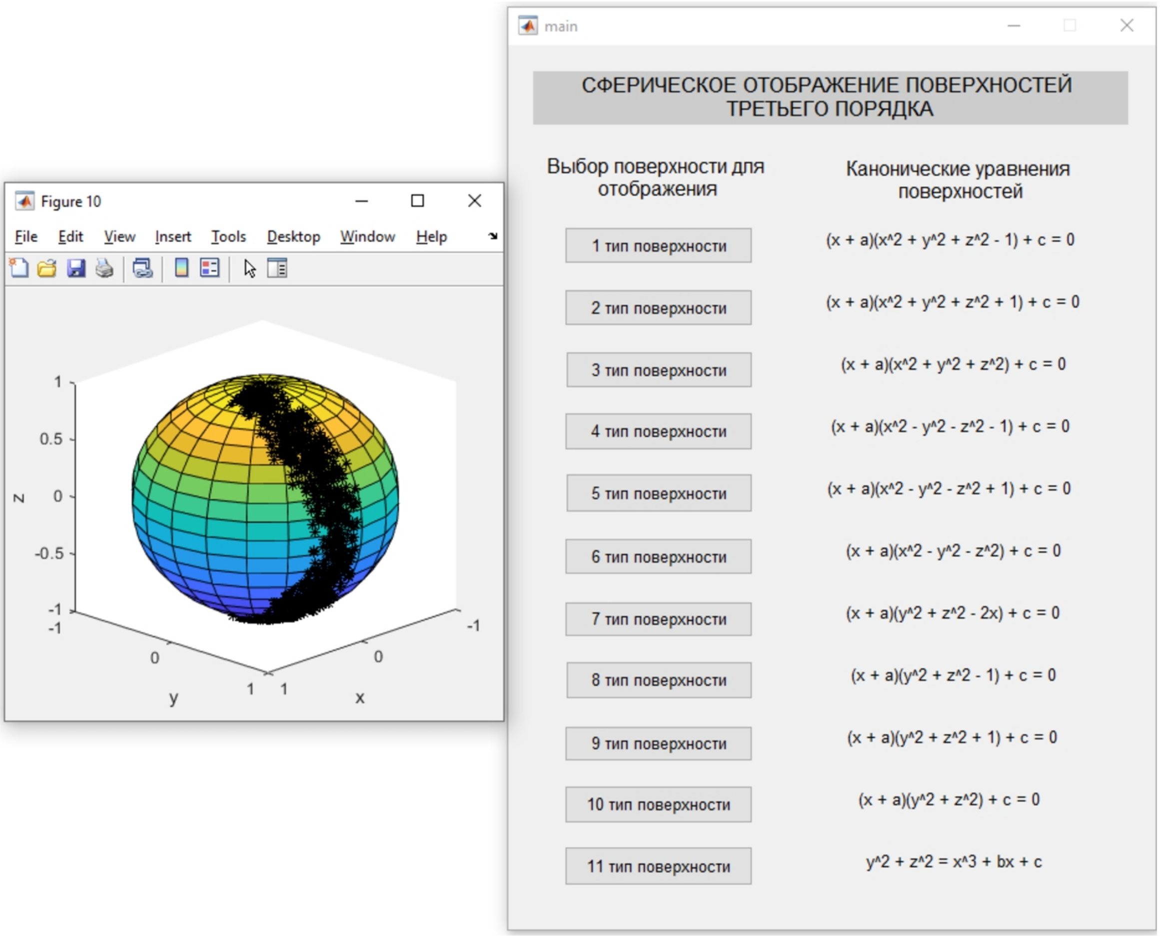

Рисунок 3. Сферический образ поверхности (10) в MatLab

Пример 4. *Код программы, который реализует визуальное представление сферического изображения 11 типа поверхности вращения третьего порядка:*

```
Файл eleven_type.m
function [ ] = eleven_type()  %ф-ция для 11 типа поверхности
for i=1:1:1000
 x(i)=rand(1);
 y(i)=rand(1);
 z(i)=rand(1);
end
for i=1:1:500
 x1(i)= -(3*x(i)^2 + 1)/(4*(y(i))^2 + (3*x(i)^2 + 1)^2 + 4*(x(i)^3 + x(i) - y(i)^2 + 1))^(1/2);
 y1(i)= (2*y(i))/(4*(y(i))^2 + (3*x(i)^2 + 1)^2 + 4*(x(i)^3 + x(i) - y(i)^2 + 1))^(1/2);
 z1(i)= -(2*(x(i)^3 + x(i) - y(i)^2 + 1)^(1/2))/(4*(y(i))^2 + (3*x(i)^2 + 1)^2 + 4*(x(i)^3 + x(i) - y(i)^2 + 1))^(1/2);
 if ((x1(i)*(9*x1(i)^3 + 4*x1(i)^2 + 6*x1(i) + 4))> -5 )
 figure(11);
 plot3(x1(i),y1(i),z1(i),'* k' );
 hold on;
 end
end
for i=501:1:1000
 x1(i)= -(3*x(i)^2 + 1)/(4*(y(i))^2 + (3*x(i)^2 + 1)^2 + 4*(x(i)^3 + x(i) - y(i)^2 + 1))^(1/2);
 y1(i)= (2*y(i))/(4*(y(i))^2 + (3*x(i)^2 + 1)^2 + 4*(x(i)^3 + x(i) - y(i)^2 + 1))^(1/2);
 z1(i)= (2*(x(i)^3 + x(i) - y(i)^2 + 1)^(1/2))/(4*(y(i))^2 + (3*x(i)^2 + 1)^2 + 4*(x(i)^3 + x(i) - y(i)^2 + 1))^(1/2);
 if ((x1(i)*(9*x1(i)^3 + 4*x1(i)^2 + 6*x1(i) + 4))> -5 )
 figure(11);
 plot3(x1(i),y1(i),z1(i),'* k' );
 hold on;
 end
end
figure(11);
sphere;
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z')
end
```

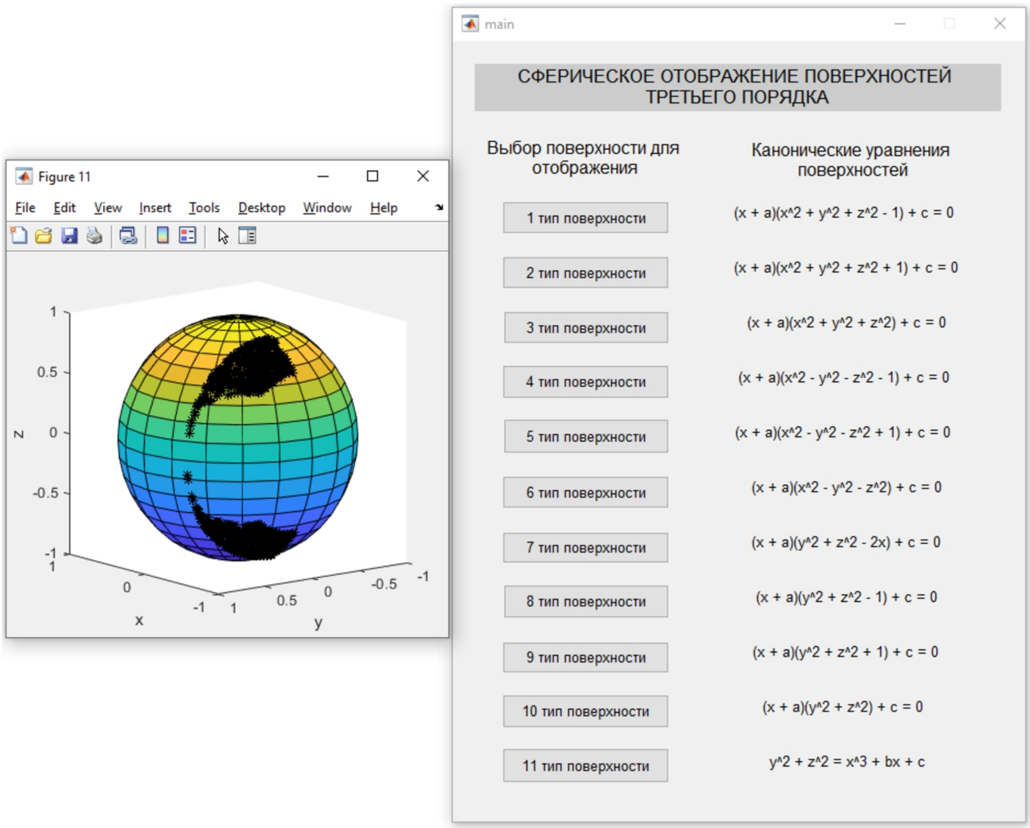

Рисунок 4. Сферический образ поверхности (11) в MatLab

Аналогичным образом разработанная программа строит сферические изображения всех одиннадцати типов поверхностей вращения третьего порядка.

Список литературы

1. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М.-Л. : ОНТИ, 1936.

2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей в евклидовом пространстве : учеб. пособие, IV семестр. — Казань : Казанский ун-т, 2013.

3. Курбатова Н.В., Пустовалова О.Г. Основы MatLab в примерах и задачах. — URL: http://edu.mmcs.sfedu.ru/pluginfile.php/31962/mod_resource/content/1/MATLAB_Kurbatova_Pustovalova.pdf.

4. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия : учеб. пособие / Под ред. Лапко А.Ф. — М. : Наука, 1974.

5. Бурова Н.М., Иващенко А.В. Компьютерная реализация примеров решений задач с участием поверхностей третьего порядка // Вестник МГСУ. — 2010. — № 4. — С. 68–71.

6. Тимошин М.И. Группы преобразований кривых третьего порядка // Школа Науки. — 2018. — № 9(9). — С. 5–14.

7. Тимошин М.И. Классификация поверхностей вращения третьего порядка // Школа Науки. — 2020. — № 2(27). — С. 1–2.

8. Андреев Г.Н. Дополнительные главы геометрии : учеб. пособие. — М. : МГИУ, 2007.

9. Потёмкин В.Г. Введение в MatLab. — URL: http://old.exponenta.ru/soft/MatLab/potemkin/book/MatLab/chapter3/3_4.asp.

10. Дьянконов В.П. MATLAB. Полный самоучитель. — М. : ДМК Пресс, 2012.