

# Теоретико-игровая модель оптимизации ключевой и кредитной ставок Центрального и коммерческого банков

Григорьев Д.С.

*Алтайский государственный педагогический университет, г. Барнаул*  
*danila.girgoryev.2019@mail.ru*

## Аннотация

Итоговым результатом статьи является теоретико-игровая модель поиска компромиссного решения Центрального и коммерческого банков при организации кредитной политики. Исследования производятся методами математического и компьютерного моделирования в рамках теории иерархических игр.

*Ключевые слова:* иерархические игры, кредитная политика.

## 1. Теоретическая часть

Рассмотрим игру 2-х лиц в нормальной форме [1, 2]:

$$\Gamma = \langle X, Y, F(x, y), G(x, y) \rangle, \quad (1)$$

где  $X, Y$  – множества стратегий первого и второго игроков соответственно и являются компактными;  $F(x, y), G(x, y)$  – функции выигрыша игроков, причем  $F, G$  – непрерывные функции.

В данной работе исследуется модель взаимодействия Центробанка и коммерческого банка. Поиск оптимальных ключевой и кредитной ставок Центробанка и коммерческого банка предложено осуществить решением иерархической игры  $\Gamma_1$  [1]: первый игрок выбирает стратегию  $x \in X$  и сообщает ее второму. Затем второй игрок выбирает стратегию  $y \in Y$ , зная  $x$ . Схематичная запись передачи информации имеет вид:  $x \xrightarrow{2} y$ .

## 2. Практическая часть

Для решения задачи оптимизации ключевой и кредитной ставок предлагается следующая математическая модель. Пусть игрок 1 – Центробанк, игрок 2 – коммерческий банк, который выдает кредиты населению. Предположим, что объем кредита зависит только от процентных ставок банков  $0 < \omega < 1$ .

$$z(\omega) = a - b\omega,$$

где  $a$  и  $b$  – положительные числа. Причем издержки банка с каждого выданного кредита равны  $z(\omega)c$ , где  $0 < c < 1$ .

Перед тем как выдавать кредиты населению, банку необходимо взять кредит у Центробанка под ключевую ставку  $0 < \eta < 1$ , которую устанавливает он же.

Цель Центробанка – максимизировать прибыль от выданных кредитов банкам, то есть максимизировать величину:

$$F(\eta, \omega) = \eta \cdot z(\omega) = \eta \cdot (a - b\omega). \quad (2)$$

Цель коммерческих банков – максимизировать прибыль от выданного кредита, то есть максимизировать величину:

$$G(\eta, \omega) = (\omega - \eta - c) \cdot (a - b\omega). \quad (3)$$

Выражения (2), (3) определяют функции выигрыша игроков в игре (1). Рассмотрим ее решение в стратегиях  $\Gamma_1$ .

Первым ходом Центробанк устанавливает ключевую ставку  $\eta$ , затем коммерческий банк, зная ключевую ставку, устанавливает процентную ставку  $\omega$ .

Исследуем функцию  $G(\eta, \omega)$ . Найдем стационарные точки:

$$\frac{\partial G}{\partial \omega} = a - 2b\omega + b\eta + bc = 0 \Rightarrow \hat{\omega} = \frac{a + b\eta + bc}{2b} = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} + \eta + c \right).$$

Вычислим вторую производную по  $\omega$ :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \omega^2} = -2b < 0.$$

Откуда следует, что в стационарной точке функция имеет локальный максимум, который в нашем случае, очевидно, является и глобальным.

Найденная стратегия коммерческого банка  $\hat{\omega} = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} + \eta + c \right)$  является оптимальным ответом на выбор первого игрока, так как именно в этой точке функция выигрыша второго игрока принимает наибольшее значение. Исследуем функцию выигрыша Центробанка, подставив оптимальную стратегию второго игрока:

$$F(\eta, \hat{\omega}) = \eta \cdot \left( a - b \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} + \eta + c \right) \right) = \eta \cdot \left( a - \frac{1}{2}(a - b\eta - bc) \right) = \frac{\eta}{2}(a - bc - b\eta) = F(\eta);$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{1}{2}(a - bc - b\eta) + \frac{\eta}{2} \cdot (-b) = 0 \Rightarrow \hat{\eta} = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} - c \right).$$

Вычислим вторую производную по  $\eta$ :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = -2b < 0.$$

Следовательно, стратегия  $\hat{\eta} = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} - c \right)$  является оптимальной, так как в этой точке функция  $F$  имеет наибольшее значение.

Построим компьютерную модель игры и сравним значение оптимальных стратегий с полученными по формулам выше.

Введем необходимые параметры (рисунок 1). Будем считать, что коэффициенты  $a$  и  $b$  измеряются в млн. рублей. Также укажем вернее и нижнее значение ставок Центрального и коммерческого банков.

$a =$	100	$\omega_{\text{ниж}} =$	0,05
$b =$	700	$\omega_{\text{верхн}} =$	0,15
$c =$	0,03	$\eta_{\text{ниж}} =$	0,01
		$\eta_{\text{верхн}} =$	0,1

Рисунок 1. Значение параметров модели

Таблица выигрышей Коммерческого банка (Матрица В)											
$\eta \backslash \omega$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15
0,01	0,650	1,160	1,530	1,760	1,850	1,800	1,610	1,280	0,810	0,200	-0,550
0,015	0,325	0,870	1,275	1,540	1,665	1,650	1,495	1,200	0,765	0,190	-0,525
0,02	0,000	0,580	1,020	1,320	1,480	1,500	1,380	1,120	0,720	0,180	-0,500
0,025	-0,325	0,290	0,765	1,100	1,295	1,350	1,265	1,040	0,675	0,170	-0,475
0,03	-0,650	0,000	0,510	0,880	1,110	1,200	1,150	0,960	0,630	0,160	-0,450
0,035	-0,975	-0,290	0,255	0,660	0,925	1,050	1,035	0,880	0,585	0,150	-0,425
0,04	-1,300	-0,580	0,000	0,440	0,740	0,900	0,920	0,800	0,540	0,140	-0,400
0,045	-1,625	-0,870	-0,255	0,220	0,555	0,750	0,805	0,720	0,495	0,130	-0,375
0,05	-1,950	-1,160	-0,510	0,000	0,370	0,600	0,690	0,640	0,450	0,120	-0,350
0,055	-2,275	-1,450	-0,765	-0,220	0,185	0,450	0,575	0,560	0,405	0,110	-0,325
0,06	-2,600	-1,740	-1,020	-0,440	0,000	0,300	0,460	0,480	0,360	0,100	-0,300
0,065	-2,925	-2,030	-1,275	-0,660	-0,185	0,150	0,345	0,400	0,315	0,090	-0,275
0,07	-3,250	-2,320	-1,530	-0,880	-0,370	0,000	0,230	0,320	0,270	0,080	-0,250
0,075	-3,575	-2,610	-1,785	-1,100	-0,555	-0,150	0,115	0,240	0,225	0,070	-0,225
0,08	-3,900	-2,900	-2,040	-1,320	-0,740	-0,300	0,000	0,160	0,180	0,060	-0,200
0,085	-4,225	-3,190	-2,295	-1,540	-0,925	-0,450	-0,115	0,080	0,135	0,050	-0,175
0,09	-4,550	-3,480	-2,550	-1,760	-1,110	-0,600	-0,230	0,000	0,090	0,040	-0,150
0,095	-4,875	-3,770	-2,805	-1,980	-1,295	-0,750	-0,345	-0,080	0,045	0,030	-0,125
0,1	-5,200	-4,060	-3,060	-2,200	-1,480	-0,900	-0,460	-0,160	0,000	0,020	-0,100

Рисунок 2. Таблица выигрышей второго игрока

Таблица выигрышей Центрального банка (Матрица А)											
$\eta \backslash \omega$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15
0,01	0,650	0,580	0,510	0,440	0,370	0,300	0,230	0,160	0,090	0,020	-0,050
0,015	0,975	0,870	0,765	0,660	0,555	0,450	0,345	0,240	0,135	0,030	-0,075
0,02	1,300	1,160	1,020	0,880	0,740	0,600	0,460	0,320	0,180	0,040	-0,100
0,025	1,625	1,450	1,275	1,100	0,925	0,750	0,575	0,400	0,225	0,050	-0,125
0,03	1,950	1,740	1,530	1,320	1,110	0,900	0,690	0,480	0,270	0,060	-0,150
0,035	2,275	2,030	1,785	1,540	1,295	1,050	0,805	0,560	0,315	0,070	-0,175
0,04	2,600	2,320	2,040	1,760	1,480	1,200	0,920	0,640	0,360	0,080	-0,200
0,045	2,925	2,610	2,295	1,980	1,665	1,350	1,035	0,720	0,405	0,090	-0,225
0,05	3,250	2,900	2,550	2,200	1,850	1,500	1,150	0,800	0,450	0,100	-0,250
0,055	3,575	3,190	2,805	2,420	2,035	1,650	1,265	0,880	0,495	0,110	-0,275
0,06	3,900	3,480	3,060	2,640	2,220	1,800	1,380	0,960	0,540	0,120	-0,300
0,065	4,225	3,770	3,315	2,860	2,405	1,950	1,495	1,040	0,585	0,130	-0,325
0,07	4,550	4,060	3,570	3,080	2,590	2,100	1,610	1,120	0,630	0,140	-0,350
0,075	4,875	4,350	3,825	3,300	2,775	2,250	1,725	1,200	0,675	0,150	-0,375
0,08	5,200	4,640	4,080	3,520	2,960	2,400	1,840	1,280	0,720	0,160	-0,400
0,085	5,525	4,930	4,335	3,740	3,145	2,550	1,955	1,360	0,765	0,170	-0,425
0,09	5,850	5,220	4,590	3,960	3,330	2,700	2,070	1,440	0,810	0,180	-0,450
0,095	6,175	5,510	4,845	4,180	3,515	2,850	2,185	1,520	0,855	0,190	-0,475
0,1	6,500	5,800	5,100	4,400	3,700	3,000	2,300	1,600	0,900	0,200	-0,500

Рисунок 3. Таблица выигрышей первого игрока

Составим таблицу значений (выигрышей) для каждого игрока (рисунки 2, 3)

Теоретико-игровой анализ: каждый из игроков стремится максимизировать свою функцию выигрыша. Выделим в таблице второго игрока максимальный выигрыш при фиксированной стратегии первого игрока (рисунок 4). Соответственно в таблице первого игрока выделим те выигрыши, которые Центральный банк получит, если первый игрок будет выбирать из множества наилучших ответов (рисунок 5). Красным цветом обозначим максимальный выигрыш первого игрока из множества наилучших ответов второго игрока.

Значение, как видно из рисунка 5, равно 1,265 млн. рублей, а оптимальные стратегии:  $\hat{\eta} = 0,055$  (5,5%) и  $\hat{\omega} = 0,11$  (11%). Выигрыш второго игрока составит, исходя из таблицы – 0,575 млн. рублей (рисунок 6).

Сравним полученные результаты компьютерной модели с результатами математической модели:

$$\hat{\eta} = \frac{1}{2} \left( \frac{100}{700} - 0,03 \right) \approx 0,056; \quad \hat{\omega} = \frac{1}{2} \left( \frac{100}{700} + 0,056 + 0,03 \right) \approx 0,11.$$

Как видим, результаты совпадают.

Таблица выигрышей Коммерческого банка (Матрица В)												
$\eta \backslash \omega$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	Max
0,01	0,650	1,160	1,530	1,760	1,850	1,800	1,610	1,280	0,810	0,200	-0,550	1,850
0,015	0,325	0,870	1,275	1,540	1,665	1,650	1,495	1,200	0,765	0,190	-0,525	1,665
0,02	0,000	0,580	1,020	1,320	1,480	1,500	1,380	1,120	0,720	0,180	-0,500	1,500
0,025	-0,325	0,290	0,765	1,100	1,295	1,350	1,265	1,040	0,675	0,170	-0,475	1,350
0,03	-0,650	0,000	0,510	0,880	1,110	1,200	1,150	0,960	0,630	0,160	-0,450	1,200
0,035	-0,975	-0,290	0,255	0,660	0,925	1,050	1,035	0,880	0,585	0,150	-0,425	1,050
0,04	-1,300	-0,580	0,000	0,440	0,740	0,900	0,920	0,800	0,540	0,140	-0,400	0,920
0,045	-1,625	-0,870	-0,255	0,220	0,555	0,750	0,805	0,720	0,495	0,130	-0,375	0,805
0,05	-1,950	-1,160	-0,510	0,000	0,370	0,600	0,690	0,640	0,450	0,120	-0,350	0,690
0,055	-2,275	-1,450	-0,765	-0,220	0,185	0,450	0,575	0,560	0,405	0,110	-0,325	0,575
0,06	-2,600	-1,740	-1,020	-0,440	0,000	0,300	0,460	0,480	0,360	0,100	-0,300	0,480
0,065	-2,925	-2,030	-1,275	-0,660	-0,185	0,150	0,345	0,400	0,315	0,090	-0,275	0,400
0,07	-3,250	-2,320	-1,530	-0,880	-0,370	0,000	0,230	0,320	0,270	0,080	-0,250	0,320
0,075	-3,575	-2,610	-1,785	-1,100	-0,555	-0,150	0,115	0,240	0,225	0,070	-0,225	0,240
0,08	-3,900	-2,900	-2,040	-1,320	-0,740	-0,300	0,000	0,160	0,180	0,060	-0,200	0,180
0,085	-4,225	-3,190	-2,295	-1,540	-0,925	-0,450	-0,115	0,080	0,135	0,050	-0,175	0,135
0,09	-4,550	-3,480	-2,550	-1,760	-1,110	-0,600	-0,230	0,000	0,090	0,040	-0,150	0,090
0,095	-4,875	-3,770	-2,805	-1,980	-1,295	-0,750	-0,345	-0,080	0,045	0,030	-0,125	0,045
0,1	-5,200	-4,060	-3,060	-2,200	-1,480	-0,900	-0,460	-0,160	0,000	0,020	-0,100	0,020

Рисунок 4. Множество благоприятных значений выигрыша второго игрока

Таблица выигрышей Центрального банка (Матрица А)													
$\eta \backslash \omega$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15		
0,01	0,650	0,580	0,510	0,440	0,370	0,300	0,230	0,160	0,090	0,020	-0,050	0,37	
0,015	0,975	0,870	0,765	0,660	0,555	0,450	0,345	0,240	0,135	0,030	-0,075	0,555	
0,02	1,300	1,160	1,020	0,880	0,740	0,600	0,460	0,320	0,180	0,040	-0,100	0,6	
0,025	1,625	1,450	1,275	1,100	0,925	0,750	0,575	0,400	0,225	0,050	-0,125	0,75	
0,03	1,950	1,740	1,530	1,320	1,110	0,900	0,690	0,480	0,270	0,060	-0,150	0,9	
0,035	2,275	2,030	1,785	1,540	1,295	1,050	0,805	0,560	0,315	0,070	-0,175	1,05	
0,04	2,600	2,320	2,040	1,760	1,480	1,200	0,920	0,640	0,360	0,080	-0,200	0,92	
0,045	2,925	2,610	2,295	1,980	1,665	1,350	1,035	0,720	0,405	0,090	-0,225	1,035	
0,05	3,250	2,900	2,550	2,200	1,850	1,500	1,150	0,800	0,450	0,100	-0,250	1,15	
0,055	3,575	3,190	2,805	2,420	2,035	1,650	1,265	0,880	0,495	0,110	-0,275	1,265	
0,06	3,900	3,480	3,060	2,640	2,220	1,800	1,380	0,960	0,540	0,120	-0,300	0,96	
0,065	4,225	3,770	3,315	2,860	2,405	1,950	1,495	1,040	0,585	0,130	-0,325	1,04	
0,07	4,550	4,060	3,570	3,080	2,590	2,100	1,610	1,120	0,630	0,140	-0,350	1,12	
0,075	4,875	4,350	3,825	3,300	2,775	2,250	1,725	1,200	0,675	0,150	-0,375	1,2	
0,08	5,200	4,640	4,080	3,520	2,960	2,400	1,840	1,280	0,720	0,160	-0,400	0,72	
0,085	5,525	4,930	4,335	3,740	3,145	2,550	1,955	1,360	0,765	0,170	-0,425	0,765	
0,09	5,850	5,220	4,590	3,960	3,330	2,700	2,070	1,440	0,810	0,180	-0,450	0,81	
0,095	6,175	5,510	4,845	4,180	3,515	2,850	2,185	1,520	0,855	0,190	-0,475	0,855	
0,1	6,500	5,800	5,100	4,400	3,700	3,000	2,300	1,600	0,900	0,200	-0,500	0,2	
												Max	1,265

Рисунок 5. Выигрыши первого игрока из множества благоприятных для второго игрока

Таблица выигрышей Коммерческого банка (Матрица В)												
$\eta \backslash \omega$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	Max
0,01	0,650	1,160	1,530	1,760	1,850	1,800	1,610	1,280	0,810	0,200	-0,550	1,850
0,015	0,325	0,870	1,275	1,540	1,665	1,650	1,495	1,200	0,765	0,190	-0,525	1,665
0,02	0,000	0,580	1,020	1,320	1,480	1,500	1,380	1,120	0,720	0,180	-0,500	1,500
0,025	-0,325	0,290	0,765	1,100	1,295	1,350	1,265	1,040	0,675	0,170	-0,475	1,350
0,03	-0,650	0,000	0,510	0,880	1,110	1,200	1,150	0,960	0,630	0,160	-0,450	1,200
0,035	-0,975	-0,290	0,255	0,660	0,925	1,050	1,035	0,880	0,585	0,150	-0,425	1,050
0,04	-1,300	-0,580	0,000	0,440	0,740	0,900	0,920	0,800	0,540	0,140	-0,400	0,920
0,045	-1,625	-0,870	-0,255	0,220	0,555	0,750	0,805	0,720	0,495	0,130	-0,375	0,805
0,05	-1,950	-1,160	-0,510	0,000	0,370	0,600	0,690	0,640	0,450	0,120	-0,350	0,690
0,055	-2,275	-1,450	-0,765	-0,220	0,185	0,450	0,575	0,560	0,405	0,110	-0,325	0,575
0,06	-2,600	-1,740	-1,020	-0,440	0,000	0,300	0,460	0,480	0,360	0,100	-0,300	0,480
0,065	-2,925	-2,030	-1,275	-0,660	-0,185	0,150	0,345	0,400	0,315	0,090	-0,275	0,400
0,07	-3,250	-2,320	-1,530	-0,880	-0,370	0,000	0,230	0,320	0,270	0,080	-0,250	0,320
0,075	-3,575	-2,610	-1,785	-1,100	-0,555	-0,150	0,115	0,240	0,225	0,070	-0,225	0,240
0,08	-3,900	-2,900	-2,040	-1,320	-0,740	-0,300	0,000	0,160	0,180	0,060	-0,200	0,180
0,085	-4,225	-3,190	-2,295	-1,540	-0,925	-0,450	-0,115	0,080	0,135	0,050	-0,175	0,135
0,09	-4,550	-3,480	-2,550	-1,760	-1,110	-0,600	-0,230	0,000	0,090	0,040	-0,150	0,090
0,095	-4,875	-3,770	-2,805	-1,980	-1,295	-0,750	-0,345	-0,080	0,045	0,030	-0,125	0,045
0,1	-5,200	-4,060	-3,060	-2,200	-1,480	-0,900	-0,460	-0,160	0,000	0,020	-0,100	0,020

Рисунок 6. Выигрыш второго игрока

### 3. Вывод

В статье рассмотрены методы математического и компьютерного моделирования взаимодействия Центрального и коммерческого банков. Математическое моделирование принятия решений по ключевой и кредитной ставкам сводится к задаче оптимизации дохода

---

Центрального и коммерческого банков. На компьютерной модели проведен теоретико-игровой анализ, с помощью которого было найдено компромиссное решение. Таким образом, сравнивая итоговые результаты найденные двумя методами при заданных параметрах, было получено совпадение оптимальных стратегий.

## Список литературы

1. Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. Исследование операций: учеб. пособие для студ. вузов. — М. : Издательский центр «Академия», 2008.
2. Писарук Н.Н. Введение в теорию игр. — Минск : БГУ, 2019.