УДК 517.9

Применение метода Аллера – Бриана для описания фильтрации в трещиновато-пористой среде[1]

Саженков С.А., Саженкова Е.В.
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирский государственный университет экономики и управления
sazhenkovs@yandex.ru, elsazh1977@gmail.com

Аннотация

Рассматривается модельная задача фильтрации вязкой сжимаемой жидкости в упругом трещиновато-пористом грунте. Изучается вопрос о гомогенизации, то есть вопрос об описании исследуемой системы на макроскопическом уровне, не учитывающем каждую отдельную трещину или пору. С помощью метода трехмасштабной сходимости Аллера — Бриана выведена трехмасштабная система уравнений при стремлении малого параметра (характерного размера трещин) к нулю. Эти уравнения являются новыми и их вывод составляет основной результат настоящей работы.

1. Постановка задачи

1.1. Модельная система вязкоупругости

В пространственно-временном цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$, где $T = const > 0$, $\Omega = (0,1)^3$ — единичный куб в $\mathbb{R}^3$, требуется определить поле перемещений $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x,t)$, удовлетворяющее системе трех уравнений (записанной в векторном виде)

$$\mathbf{w}_{tt} = \mathrm{div}_x\{(1-\chi^\varepsilon)\mathbb{A} : \mathbf{E}(x,\nabla\mathbf{w}_t) + \chi^\varepsilon\mathbb{B} : \mathbf{E}(x,\nabla\mathbf{w})\} + \mathbf{f}(x), \tag{1}$$

начальным условиям

$$\mathbf{w}|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{w}_t|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \tag{2}$$

и граничному условию

$$\mathbf{w}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3}$$

Здесь $\chi^\varepsilon(x) = \chi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\chi_2\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right)$ — характеристическая функция пористого грунта. Подробное описание функций χ_1 и χ_2 дано ниже в п. 1.2. Положительно определенные тензоры 4-го порядка $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — это заданные тензоры вязкости жидкости и упругости грунта, соответственно; $\mathbf{E}(x,\nabla\mathbf{w}_t)$ — тензор скоростей деформации, $E_{ij}(x,\nabla\mathbf{w}_t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_{i\,t}}{\partial x_j} + \frac{\partial w_{j\,t}}{\partial x_i}\right)$; $\mathbf{E}(x,\nabla\mathbf{w})$ — тензор напряжений в твердой фазе, $E_{ij}(x,\nabla\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right)$; $\mathbf{f}$ — заданный гладкий вектор распределенных внешних массовых сил; $\mathbf{v}_0$ — заданное начальное распределение поля скоростей, принадлежащее пространству $L^2(\Omega)$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-08275). Название проекта: «Вариационное исчисление и уравнения в частных производных».

В покомпонентной форме система (1) имеет вид

$$w_{qtt} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (1-\chi^\varepsilon) \sum_{k,l=1}^{3} a^{qjkl} E_{kl}(x, \nabla \mathbf{w}_t) + \chi^\varepsilon \sum_{k,l=1}^{3} b^{qjkl} E_{kl}(x, \nabla \mathbf{w}) \right\} + f_q(x), \quad q = 1,2,3. \tag{4}$$

1.2. Микроструктура континуума

Математическая модель (1)–(3) содержит малый параметр $\varepsilon > 0$. Этот параметр равен отношению характеристического (среднего) размера трещин к характеристическому размеру всего континуума. Также, ε принимается в качестве отношения среднего размера пор к среднему размеру трещин. Для выполнения процедуры гомогенизации снабжаем трещиновато-пористый континуум периодической структурой. Такой подход является классическим в теории гомогенизации [1]. Состоит он в следующем.

Считается, что область $\Omega = (0,1)^3 \subset \mathbb{R}^3$ состоит из двух подобластей: Ω_f^ε и Ω_s^ε, занятых жидкой и упругой фазами, соответственно. Расположение этих двух подобластей описывается с помощью шаблонных ячеек $Y = (0,1)^3$ и $Z = (0,1)^3$, описывающих конфигурацию трещин и пор, соответственно, и также разбитых на две непересекающиеся подобласти каждая. Вводятся эти ячейки посредством характеристических функций упругой части:

$$\chi_1(y) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad y \in Y_s, \\ 0 & \text{при} \quad y \in Y_f, \end{cases} \qquad \chi_2(z) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad y \in Z_s, \\ 0 & \text{при} \quad y \in Z_f. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь Y состоит из упругой части Y_s и жидкой части Y_f. Аналогично, Z состоит из упругой части Z_s и жидкой части Z_f. Затем учитывается, что размеры трещин и пор весьма малы по отношению к размеру всего континуума и что размер пор весьма мал по отношению к размеру трещин. Как результат, вводим подобласти Ω_f^ε и Ω_s^ε следующим образом:

$$\begin{aligned} x \in \Omega_f^\varepsilon \quad &\text{при} \quad \chi^\varepsilon(x) = \chi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\chi_2\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right) = 0, \\ x \in \Omega_s^\varepsilon \quad &\text{при} \quad \chi^\varepsilon(x) = \chi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\chi_2\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right) = 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Из выше изложенного, видно, что пространство, заполненное жидкостью, рассматривается как суперпозиция сеток трещин и пор, что хорошо согласуется со структурами реальных грунтов [2].

2. Корректность задачи (1)–(3)

Поскольку в постановке задачи (1)–(3) имеются быстро осциллирующие негладкие коэффициенты под знаками производных, то решение можно понимать только в обобщенном смысле.

Определение 1. *Обобщенным решением задачи (1)–(3) называется вектор-функция* $\mathbf{w}^\varepsilon = \mathbf{w}^\varepsilon(\vec{x}, t)$ *из пространства* $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$*, удовлетворяющая интегральному равенству:*

$$\int_\Omega \int_0^T \mathbf{w}_t^\varepsilon \cdot \mathbf{H}_t \, d\vec{x}\, dt + \int_\Omega \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{H}(x,0)\, dx = \int_0^T \int_\Omega \sum_{q,j=1}^{3} \Big\{ (1-\chi^\varepsilon) \sum_{k,l=1}^{3} a^{qjkl} E_{kl}(x, \nabla \mathbf{w}_t^\varepsilon)$$
$$+ \chi^\varepsilon \sum_{q,k,l=1}^{3} b^{qjkl} E_{kl}(x, \nabla \mathbf{w}^\varepsilon) \Big\} H_{qx_j} dt\, dx - \int_0^T \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{H}\, dx\, dt, \tag{7}$$

при любых вектор-функциях $\mathbf{H} \in C^1(Q_T)$*, обращающихся в нуль в окрестности* $\{t = T\}$ *и границы* $\partial\Omega$.

Результаты о существовании и единственности обобщенного решения при фиксированном $\varepsilon > 0$ и равномерные по ε оценки на решение $\mathbf{w}^\varepsilon$ следуют из положений хорошо известной теории обобщенных решений уравнений математической физики (см., например, [3, с. 158-202]). Имеет место следующее предложение.

Предложение 1. **(1)** *При любом малом фиксированном* $\varepsilon > 0$ *задача* (1)–(3) *имеет единственное обобщенное решение* $\mathbf{w}^\varepsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

(2) *Семейства* $\{\mathbf{w}_t^\varepsilon\} \subset L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, $\{(1-\chi^\varepsilon)\mathbf{w}_t^\varepsilon\} \subset L^2(0,T;W_2^1(\Omega))$, $\{\chi^\varepsilon \mathbf{w}^\varepsilon\} \subset L^2(0,T;W_2^1(\Omega))$ *равномерно по* ε *ограничены.*

3. Метод трехмасштабной сходимости Аллера – Бриана

Нашей целью является предельный переход в интегральном равенстве (7) при $\varepsilon \to 0$. Этот переход будет основан на методе трехмасштабной сходимости Аллера – Бриана (см. [4]). Сформулируем основные положения этого метода, адаптируя их к изучаемой задаче.

Предложение 2. *Пусть* $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ *— это ограниченная последовательность в* $L^2(\Omega\times(0,T))$. *Тогда найдутся подпоследовательность из* $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ *(будем ее по-прежнему обозначать через* $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$*) и вектор-функция* $\mathbf{w}=\mathbf{w}(x,y,z,t)$, *принадлежащая пространству* $L^2(\Omega\times Y\times Z\times(0,T))$, *такие, что справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_\Omega \mathbf{w}^\varepsilon(x,t)\cdot\mathbf{h}\left(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2},t\right)dx\,dt = \int_0^T\int_\Omega\int_Y\int_Z \mathbf{w}(x,y,z,t)\cdot\mathbf{h}\left(x,y,z,t\right)dxdydzdt \quad (8)$$

для всевозможных гладких пробных вектор-функций $\mathbf{h}=\mathbf{h}(x,y,z,t)$, *1-периодических по* y *и* z *[4, theorem 2.4].*

Определение 2. *Если выполняется предельное соотношение* (8) *для всевозможных* $\mathbf{h}$, *то говорим, что* $\mathbf{w}^\varepsilon$ *трехмасштабно сходится к* $\mathbf{w}$. *(Обозначаем* $\mathbf{w}^\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \mathbf{w}$ *3-sc.)*

В силу предложений 1 и 2 и теоремы о трехмасштабной сходимости градиентов [4, theorem 2.6] справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}_{\varepsilon\to 0}$ *— последовательность слабых обобщенных решений решаемой задачи. Тогда найдутся подпоследовательность из* $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}_{\varepsilon\to 0}$ *(по-прежнему обозначаемая через* $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$*) и предельные вектор-функции* $\mathbf{w}(x,t)$, $\mathbf{V}(x,y,t)$, $\mathbf{W}(x,y,z,t)$, *такие, что*

$$\mathbf{w}^\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathbf{w} \quad \textit{3-sc.};$$

$$\nabla_x\mathbf{w}^\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \nabla_x\mathbf{w}+\nabla_y\mathbf{V}+\nabla_z\mathbf{W} \quad \textit{3-sc.}$$

4. Вывод усредненных трехмасштабных уравнений

Подставим в интегральное равенство (7) пробную функцию $\mathbf{H}=\mathbf{H}^\varepsilon(x,t)$ вида

$$\mathbf{H}^\varepsilon(x,t)=\mathbf{h}(x,t)+\varepsilon\mathbf{h}_1\left(x,\frac{x}{\varepsilon},t\right)+\varepsilon^2\mathbf{h}_2\left(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2},t\right), \quad (9)$$

где $\mathbf{h}=\mathbf{h}(x,t)$, $\mathbf{h}_1=\mathbf{h}_1(x,y,t)$, $\mathbf{h}_2=\mathbf{h}_2(x,y,z,t)$ — произвольные пробные функции, такие, что $\mathbf{h}$ обращается в нуль в окрестности $\partial\Omega$ и сечения $\{t=T\}$, $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$ обращаются в нуль в окрестности $\partial\Omega$ и сечения $\{t=T\}$, $\mathbf{h}_1$ является 1-периодической по y, $\mathbf{h}_2$ является 1-периодической по y и z.

Перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ в равенстве (7). На основании теоремы 1 выводим интегральное равенство, которое вследствие достаточной произвольности пробных вектор-функций $\mathbf{h}$, $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$ в смысле теории распределений эквивалентно трехмасштабной системе, состоящей из трех векторных уравнений и набора начальных и граничных условий:

(1) макроскопическое уравнение

$$\mathbf{w}_{tt} = \mathrm{div}_x \Big\{ \int_Y \int_Z \big[(1 - \chi_1(y)\chi_2(z)) \mathbb{A} : (\mathbf{E}(x, \mathbf{w}_t) + \mathbf{E}(y, \mathbf{V}_t) + \mathbf{E}(z, \mathbf{W}_t)) \\ + \chi_1(y)\chi_2(z)\mathbb{B} : (\mathbf{E}(x, \mathbf{w}) + \mathbf{E}(y, \mathbf{V}) + \mathbf{E}(z, \mathbf{W})) \big] dz dy \Big\} + \mathbf{f}, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{10}$$

(2) мезоскопическое уравнение

$$\mathrm{div}_y \Big\{ \int_Z \big[(1 - \chi_1(y)\chi_2(z)) \mathbb{A} : (\mathbf{E}(x, \mathbf{w}_t) + \mathbf{E}(y, \mathbf{V}_t) + \mathbf{E}(z, \mathbf{W}_t)) \\ + \chi_1(y)\chi_2(z)\mathbb{B} : (\mathbf{E}(x, \mathbf{w}) + \mathbf{E}(y, \mathbf{V}) + \mathbf{E}(z, \mathbf{W})) \big] dz \Big\} = 0, \quad (x, y, t) \in \Omega \times Y \times (0, T), \tag{11}$$

(3) микроскопическое уравнение

$$\mathrm{div}_z \Big\{ (1 - \chi_1(y)\chi_2(z)) \mathbb{A} : (\mathbf{E}(x, \mathbf{w}_t) + \mathbf{E}(y, \mathbf{V}_t) + \mathbf{E}(z, \mathbf{W}_t)) \\ + \chi_1(y)\chi_2(z)\mathbb{B} : (\mathbf{E}(x, \mathbf{w}) + \mathbf{E}(y, \mathbf{V}) + \mathbf{E}(z, \mathbf{W})) \Big\} = 0, \quad (x, y, z, t) \in \Omega \times Y \times Z \times (0, T), \tag{12}$$

(4) начальные условия

$$\mathbf{w}|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{w}_t|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \tag{13}$$

(5) граничное условие

$$\mathbf{w}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{14}$$

(6) условия периодичности и калибровки мезоскопического перемещения $\mathbf{V}$ и микроскопического перемещения $\mathbf{W}$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, t) \quad \text{1-периодична по } y, \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}(x, y, z, t) \quad \text{1-периодична по } y \text{ и } z, \\ \int_Y \mathbf{V}(x, y, t) dy = 0, \quad \int_Y \int_Z \mathbf{W}(x, y, z, t) dz\, dy = 0. \tag{15}$$

На основании проведенных выше рассуждений приходим к следующему основному результату статьи.

Теорема 2. *Система (10)–(15) представляет собой корректную замкнутую усредненную трехмасштабную модель, искомыми в которой являются эффективное (макромасштабное) распределение поля перемещений* $\mathbf{w}$ *и распределения перемещений на мезоскопическом и микроскопическом уровнях* $\mathbf{V}$ *и* $\mathbf{W}$*, соответственно.*

Список литературы

1. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolau G. Asymptotic analysis for periodic structures. — Amsterdam : N. Holland, 1978.

2. Bear J. Dynamics of fluids in porous media. — New York : Dover Publ., 1988.

3. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. — М. : Наука, 1973.

4. Allaire G., Briane M. Multiscale convergence and reiterated homogenisation // Proc. R. Soc. Edinb. — Vol. 126. — 1996. — P. 298–341.