Свойства одномерного конформно-плоского сплайна[1]

М.В. Куркина, В.В. Славский
Югорский государственный университет
mavi@inbox.ru, slavsky2004@mail.ru

В работах [1, 2] было введено понятие конформно-плоских сплайнов, в статье [3] разработаны соответствующие численные алгоритмы для системы MatLab. Данная работа служит продолжением работы [4], изучаются более подробно свойства опорной функции отрезка на плоскости Лобачевского (одномерного конформно-плоского сплайна).

Одномерным конформно-плоским сплайном называется конформно-плоская метрика (в терминах работы [2] – опорная функция), соответствующая элементарному выпуклому подмножеству в плоскости Лобачевского – точке, отрезку прямой, прямой или лучу. Пусть $L \subset H^2_\kappa$ – прямая на плоскости Лобачевского H^2_κ кривизны $(-\kappa)$ $(\kappa > 0)$. Тогда уравнение опорной функции L имеет вид

$$|at^2 + \sqrt{2}bt + c| = |a(t - x_1)(t - x_2)| = |f(t)|, \tag{1}$$

где x_1, x_2 – корни квадратичного полинома $f(t)$. Если $P_1 \in H^2_\kappa$ – точка на плоскости Лобачевского, то опорная функция точки P_1 будет иметь вид

$$g_1(t) = a_1t^2 + \sqrt{2}b_1t + c_1 = a_1(t - \alpha_1 - i\beta_1)(t - \alpha_1 + i\beta_1), \tag{2}$$

где $\alpha_1 \pm i\beta_1$ – комплексно сопряженные корни квадратичного полинома $g_1(t)$. Прямой L и точке P_1 соответствуют векторы:

$$w = [a, b, c] = [a, -\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}a, x_1x_2a],$$
$$w_1 = [a_1, b_1, c_1] = [a_1, -\sqrt{2}\alpha_1a_1, a_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)]$$

[1]Работа выполнена при поддержке ФЦПК «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., тема «Фундаментальные проблемы анализа и геометрии» (номер заявки в информационной компьютеризированной системе 2012-1.1-12-000-1003-014); при финансовой поддержке РФФИ (грант №10-01-90000-Бел_а), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ РФ (НШ-5682.2008.1), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт №02.740.11.0457).

псевдоевклидова пространства M^3 [1]. Скалярные квадраты в M^3 этих векторов равны:

$$\begin{aligned} \langle w, w\rangle &= b^2 - 2ac = \frac{a^2(x_2 - x_1)^2}{2} = \frac{\kappa}{2}, \\ \langle w_1, w_1\rangle &= b_1^2 - 2a_1c_1 = -2a_1^2\beta_1^2 = -\frac{\kappa}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Условие $P_1 \in L$ в данном случае эквивалентно равенству

$$\langle w, w_1\rangle = aa_1[\alpha_1(x_1 + x_2) - x_1x_2 - \alpha_1^2 - \beta_1^2] = 0. \tag{4}$$

Исключая κ из (3), получим:

$$a^2(x_2 - x_1)^2 = 4a_1^2\beta_1^2.$$

Исключая β_1 из этого равенства и (4), получим:

$$\frac{a^2}{a_1^2} = -\frac{4(\alpha_1 - x_1)(\alpha_1 - x_2)}{(x_2 - x_1)^2},$$

как следствие, имеем:

$$\alpha_1 \in [x_1, x_2], \quad a \le a_1.$$

Геометрически равенства (3–4) соответствуют рисунку *1*, где пунктирной линией изображен график функции $|f(t)|$, сплошной – две параболы $g_1(t)$, $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям (3–4). В модели Пуанкаре для плоскости Лобачевского рисунку *1* будет соответствовать рисунок *2*, где параболе $f(t)$ соответствует прямая L, параболам g_1, g_2 – точки P_1, P_2 на прямой L, корням x_1, x_2 – концы x_1, x_2 прямой L на абсолюте. Точкам t_1, t_2 касания парабол $f(t)$ и $g_1(t)$, $g_2(t)$ на рисунке *1* соответствуют точки абсолюта t_1, t_2 на рисунке *2*, аналогично точкам s_1, s_2 касания парабол $-f(t)$ и $g_1(t)$, $g_2(t)$ соответствуют точки абсолюта s_1, s_2. Координаты точек t_i, s_i легко находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} f'(t) &= g_i'(t), \\ -f'(s) &= g_i'(s) \end{aligned}$$

и выражаются через характеристики этих парабол:

$$t_i = \frac{ax_1 + ax_2 - 2\alpha_i a_1}{2(a - a_1)}, \quad s_i = \frac{ax_1 + ax_2 + 2\alpha_i a_1}{2(a + a_1)}.$$

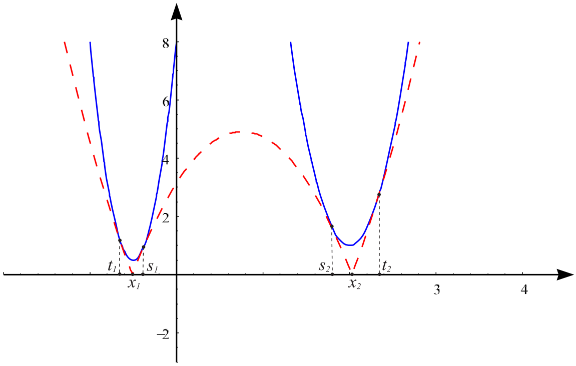

Рис. 1. Параболы $f(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$

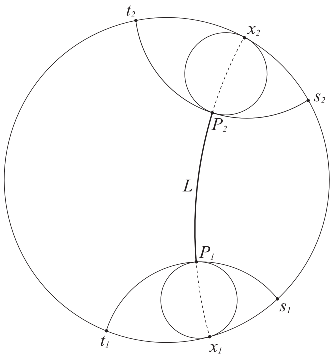

Рис. 2. Прямая L и точки P_1, P_2 на ней

Замечание. Сложное отношение четырех точек

$$(x_1x_2, t_is_i) = \frac{t_i - x_1}{t_i - x_2} : \frac{s_i - x_1}{s_i - x_2} = -1,$$

т.е. четверки точек $[x_1x_2, t_1s_1]$ и $[x_1x_2, t_2s_2]$, – ангармонические, это соответствует тому, что прямые $[\mathrm{t}_i\mathrm{s}_i]$ ортогональны прямой L (см. рис. *2*).

Отрезок $\triangle = [P_1, P_2] \subset H^2_\kappa$ на плоскости Лобачевского H^2_κ кривизны $(-\kappa)$ $(\kappa > 0)$ определяется указанием его концов – двух точек, им соответствуют две параболы:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= a_1x^2 + \sqrt{2}xb_1 + c_1, \\ g_2(x) &= a_2x^2 + \sqrt{2}xb_2 + c_2 \end{aligned}$$

или два вектора $w_1 = [b_1, a_1, c_1]$, $w_2 = [b_2, a_2, c_2]$ псевдоевклидова пространства M^3 [1]. Пусть $\alpha_i \pm i\beta_i$ – комплексно сопряженные корни квадратичных уравнений $g_i(x) = 0$, $i = 1, 2$. Вершины парабол $g_1(t)$, $g_2(t)$ будут соответственно $M_1(\alpha_1, a_1\beta_1^2)$, $M_2(\alpha_2, a_2\beta_2^2)$.

Составим уравнение опорной функции прямой L, проходящей через P_1, P_2. Из работы [4] следует, что

$$f(t) = \gamma((\alpha_1 - \alpha_2)(t - \alpha_1)(t - \alpha_2) - \beta_1^2(t - \alpha_2) + \beta_2^2(t - \alpha_1)),$$

корни полинома $f(t)$ находятся из системы (4):

$$\begin{aligned} \alpha_1(x_1 + x_2) - x_1x_2 - \alpha_1^2 - \beta_1^2 = 0, \\ \alpha_2(x_1 + x_2) - x_1x_2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Положим

$$D = \left((\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2\right)\left((\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2\right).$$

Тогда для корней полинома $f(t)$ справедливо равенство

$$(x_2 - x_1)^2 = \frac{D}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}.$$

Коэффициент γ находится из равенства

$$\gamma^2 = \frac{4a_1^2\beta_1^2}{D} = \frac{4a_2^2\beta_2^2}{D},$$

где $4a_1^2\beta_1^2 = 4a_2^2\beta_2^2 = \kappa$, так как параболы g_1, g_2 определяют точку на плоскости Лобачевского H_κ^2.

Обратно, если известен полином $f(t)$

$$f(t) = a(t - x_1)(t - x_2)$$

и координата $t_0 = \alpha$ вершины параболы

$$g(t) = b(t - \alpha - i\beta)(t - \alpha + i\beta),$$

то b, β однозначно находятся из уравнений:

$$b^2 = -\frac{a^2(x_2 - x_1)^2}{4(\alpha - x_1)(\alpha - x_2)},$$

$$\beta^2 = \frac{a^2(x_2 - x_1)^2}{b^2}.$$

Библиографический список

1. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. Конформные сплайн-функции // Современные проблемы математики и механики. — 2011. — Т. VI, №2.

2. Родионов Е.Д., Славский В.В. Конформно-плоские римановы пространства и их обобщения // Дни геометрии в Новосибирске, 2011 : труды международной конференции. — Новосибирск : НГУ, 2012.

3. Родионов Е.Д., Куркина М.В., Славский В.В. Численные методы интерполяции, основанные на выпуклой геометрии в пространстве Лобачевского // Вестник НГУ. В печати.

4. Куркина М.В., Родионов Е.Д., Славский В.В. Об одномерных конформно-плоских сплайнах // Ломоносовские чтения на Алтае 2012 : материалы международной школы-семинара. Барнаул, 22–23 ноября. — Барнаул : АлтГПА, 2012. – Ч. 1.