Применение систем компьютерной математики для вычисления компонент оператора кривизны 4-мерного риманова многообразия[1]

О.П. Хромова
Алтайский государственный университет
khromova.olesya@gmail.com

В настоящее время широко распространено применение систем компьютерной математики при решении научно-исследовательских задач. Это связано с тем, что пакеты прикладных программ совмещают в одной оболочке процедуры для численных и аналитических расчетов, средства для визуализации, программирования и представления результатов. В геометрии и анализе существует множество примеров, подтверждающих эффективность использования универсальных математических систем при доказательстве теорем [1].

В данной работе пакеты символьных расчетов применяются для вычисления компонент оператора кривизны 4-мерного однородного риманова многообразия.

Пусть (M, g) – 4-мерное риманово многообразие связности Леви-Чивита ∇ и $R(X,Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X,Y]}Z$ – тензор кривизны Римана, где X, Y, Z – векторные поля на M.

Риманова метрика g индуцирует скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в слоях пространства расслоения $\Lambda^2 M$ по правилу

$$\langle X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2\rangle_x = \det(g_x(X_i, Y_j)).$$

Определим *оператор Ходжа* $*$ как единственный изоморфизм векторных расслоений $* : \Lambda^2_x M \to \Lambda^2_x M$, для которого

$$\langle *\alpha, \beta\rangle \operatorname{vol} = \alpha \wedge \beta$$

[1]Работа выполнена в рамках программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» на 2012–2016 гг. «Развитие Алтайского государственного университета в целях модернизации экономики и социальной сферы Алтайского края и регионов Сибири», мероприятие «Конкурс грантов» (№2012.312.2.3), а также при поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант НШ–921.2012.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт №02.740.11.0457) и гранта ФЦПК (соглашение №8206, заявка №2012-1.1-12-000-1003-014).

для любых $\alpha, \beta \in \Lambda_x^2 M$, $x \in M$, где vol — форма объема на M.

Риманову тензору кривизны R в любой точке многообразия M можно поставить в соответствие оператор $\mathcal{R} : \Lambda_x^2 M \to \Lambda_x^2 M$, определяемый равенством

$$\langle X \wedge Y, \mathcal{R}(T \wedge V) \rangle_x = R_x(X, Y, T, V), \tag{1}$$

где $R_x(X, Y, T, V) = g_x(R(X, Y)T, V)$.

Любой ортонормированный базис e_1, e_2, e_3, e_4 пространства $T_x M$ определяет ортонормированный базис

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 \pm e_3 \wedge e_4),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_3 \pm e_4 \wedge e_2), \\ &\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_4 \pm e_2 \wedge e_3) \end{aligned} \tag{2}$$

пространства $\Lambda_x^{\pm} M$ (см., например, [2]).

Таким образом, формулы (1) и (2) позволяют определить компоненты оператора кривизны $\mathcal{R}$ через компоненты тензора кривизны Римана R (см. подробнее [3]).

Вычисление компонент тензора кривизны Римана R с помощью системы компьютерной математики Maple представлено в [4]. Опишем применение пакета Maple для нахождения компонент оператора кривизны $\mathcal{R}$.

У данной процедуры один входной параметр R — массив компонент тензор Римана.

Ro_proc:=proc(R)

Описываем локальные переменные

local i,j;

Описываем глобальные переменные

global Ro;

Тело процедуры

```
Ro:=array(symmetric,1..4,1..4):
Ro[1,1]:=factor((1/2)*(R[1,2,1,2]+2*R[1,2,3,4]+R[3,4,3,4]));
Ro[2,2]:=factor((1/2)*(R[1,3,1,3]+2*R[1,3,4,2]+R[4,2,4,2]));
Ro[3,3]:=factor((1/2)*(R[1,4,1,4]+2*R[1,4,2,3]+R[2,3,2,3]));
Ro[1,2]:=factor((1/2)*(R[1,2,1,3]+R[1,2,4,2]+R[3,4,1,3]+R[3,4,4,2]));
Ro[1,3]:=factor((1/2)*(R[1,2,1,4]+R[1,2,2,3]+R[3,4,1,4]+R[3,4,2,3]));
Ro[2,3]:=factor((1/2)*(R[1,3,1,4]+R[1,3,2,3]+R[4,2,1,4]+R[4,2,2,3]));
Ro[4,4]:=factor((1/2)*(R[1,2,1,2]-2*R[1,2,3,4]+R[3,4,3,4]));
Ro[5,5]:=factor((1/2)*(R[1,3,1,3]-2*R[1,3,4,2]+R[4,2,4,2]));
```

```
Ro[6,6]:=factor((1/2)*(R[1,4,1,4]−2*R[1,4,2,3]+R[2,3,2,3]));
Ro[4,5]:=factor((1/2)*(R[1,2,1,3]−R[1,2,4,2]−R[3,4,1,3]+R[3,4,4,2]));
Ro[4,6]:=factor((1/2)*(R[1,2,1,4]−R[1,2,2,3]−R[3,4,1,4]+R[3,4,2,3]));
Ro[5,6]:=factor((1/2)*(R[1,3,1,4]−R[1,3,2,3]−R[4,2,1,4]+R[4,2,2,3]));
Ro[1,4]:=factor((1/2)*(R[1,2,1,2]−R[3,4,3,4]));
Ro[1,5]:=factor((1/2)*(R[1,2,1,3]−R[1,2,4,2]+R[3,4,1,3]−R[3,4,4,2]));
Ro[1,6]:=factor((1/2)*(R[1,2,1,4]−R[1,2,2,3]+R[3,4,1,4]−R[3,4,2,3]));
Ro[2,4]:=factor((1/2)*(R[1,3,1,2]+R[1,2,4,2]−R[3,4,1,3]−R[3,4,4,2]));
Ro[2,5]:=factor((1/2)*(R[1,3,1,3]−R[4,2,4,2]));
Ro[2,6]:=factor((1/2)*(R[1,3,1,4]−R[1,3,2,3]+R[4,2,1,4]−R[4,2,2,3]));
Ro[3,4]:=factor((1/2)*(R[1,2,1,4]+R[1,2,2,3]−R[3,4,1,4]−R[3,4,2,3]));
Ro[3,5]:=factor((1/2)*(R[1,3,1,4]+R[1,3,2,3]−R[4,2,1,4]−R[4,2,2,3]));
Ro[3,6]:=factor((1/2)*(R[1,4,1,4]−R[2,3,2,3]));
```

Выводим на печать ненулевые компоненты оператора кривизны:

```
for i from 1 to 4 do
for j from 1 to 4 do
if Ro[i,j]=0 then
else print(‘Ro[‘||i||j||‘]=‘(factor(Ro[i,j])))
fi;od;od;
end proc:
```

Данная процедура вычисления компонент оператора кривизны успешно применялась при решении следующих задач:

1) исследование конформно полуплоских четырехмерных групп Ли [5];

2) определение компонент матрицы оператора кривизны левоинвариантных римановых метрик четырехмерных групп Ли [6];

3) изучение спектра оператора кривизны конформно плоских римановых многообразий [7].

Библиографический список

1. Балащенко В.В., Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Однородные пространства: теория и приложения : монография. — Ханты-Мансийск : Полиграфист, 2008.

2. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. — М. : Мир, 1990. — Т. 1, 2.

3. Гладунова О.П., Куркина М.В., Неризько С.В. и др. Математическое моделирование в социально-экономических и естественных науках : монография. — Барнаул : Концепт, 2012.

4. Гладунова О.П. Применение математических пакетов к вычислению инвариантных тензорных полей на трехмерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой // Вестник БГПУ: Естественные и точные науки. — 2006. — №2.

5. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О конформно полуплоских 4-мерных группах Ли // Владикавказский математический журнал. — 2011. — Т. 13, №3.

6. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О компонентах разложения тензора кривизны на группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой. — Saarbruken : LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012.

7. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О спектре оператора кривизны конформно плоских римановых многообразий // ДАН. — 2013. — Т. 450, №2.