УДК 514

О тензоре Схоутена-Вагнера неголономного многообразия Кенмоцу

Букушева А.В.
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, г. Саратов
bukusheva@list.ru

Аннотация

Вводится понятие структуры неголономного многообразия Кенмоцу. В отличие от многообразия Кенмоцу, распределение неголономного многообразия Кенмоцу не интегрируемо. Изучаются внутренние инварианты неголономного многообразия Кенмоцу. В частности, доказывается, что тензор Схоутена-Вагнера такого многообразия равен нулю. Среди N-связностей, определяемых на неголономном многообразии Кенмоцу, выделяются связности, адаптированные к его структуре.

Ключевые слова: неголономное многообразие Кенмоцу, внутренняя связность почти контактного метрического многообразия, N-связность неголономного многообразия Кенмоцу, тензор Схоутена-Вагнера.

1. Введение

В работе [1] исследовалось многообразие Кенмоцу с заданной на нем N-связностью. Из условия интегрируемости распределения многообразия Кенмоцу следует, что N-связность относится к классу четверть-симметрических связностей. В указанной работе среди N-связностей был выделен класс связностей, адаптированных к структуре многообразия Кенмоцу. В частности, было доказано, что N-связность сохраняет структурный эндоморфизм φ многообразия Кенмоцу тогда и только тогда, когда эндоморфизмы N и φ коммутируют. Найденные в адаптированных координатах коэффициенты связности Леви-Чивита и N-связности многообразия Кенмоцу использовались при исследовании свойств инвариантов внутренней геометрии многообразия Кенмоцу. К инвариантам внутренней геометрии почти контактного метрического многообразия принято относить: тензор кривизны Схоутена; 1-форму η, порождающую распределение D; производную Ли $L_{\vec{\xi}}g$ метрического тензора g вдоль векторного поля $\vec{\xi}$; тензорное поле P, компоненты которого в адаптированных координатах выражаются с помощью равенств $P_{ad}^{c} = \partial_n \Gamma_{ad}^{c}$. Поле P названо в работе [1] тензором Схоутена-Вагнера. Было доказано, что тензор Схоутена-Вагнера внутренней связности многообразия Кенмоцу равен нулю. В настоящей работе вводится понятие неголономного многообразия Кенмоцу. Главное отличие неголономного многообразия Кенмоцу от "классического" многообразия Кенмоцу заключается в том, в неголономном случае распределение изучаемого многообразия не обладает свойством инволютивности. Приводится пример неголономного многообразия Кенмоцу. Доказывается, что также как и в "классическом случае" , тензор Схоутена-Вагнера внутренней связности неголономного многообразия Кенмоцу равен нулю.

2. Основные сведения из геометрии многообразий Кенмоцу

Почти контактным метрическим многообразием называется гладкое многообразие M нечетной размерности $n = 2m+1$, $m > 1$ с заданной на нем почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ [2]- [3]. Здесь, в частности, η — 1-форма, порождающая распределение $D = \ker\eta$, $\vec{\xi}$ — векторное поле, порождающее оснащение $D^\perp$ распределения $D : D^\perp = Span(\vec{\xi})$. Гладкое распределение D будем называть распределением почти контактного метрического многообразия. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^\perp$. Почти контактное метрическое многообразие называется нормальным, если выполняется условие $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где $N_\varphi(\vec{x},\vec{y}) = [\varphi\vec{x},\varphi\vec{y}] + \varphi^2[\vec{x},\vec{y}] - \varphi[\varphi\vec{x},\vec{y}] - \varphi[\vec{x},\varphi\vec{y}]$ - тензор Нейенхейса эндоморфизма φ. Нормальное почти контактное метрическое многообразие называется многообразием Кенмоцу, если $d\eta = 0$, $d\Omega = 2\eta\wedge\Omega$ [4], [5]. Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивита тензора $g : \tilde{\nabla}$, $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$. Известно, что почти контактное метрическое многообразие M является многообразием Кенмоцу тогда и только тогда, когда

$$(\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\varphi)\vec{y} = -\eta(\vec{y})\varphi\vec{x} - g(\vec{x},\varphi\vec{y})\vec{\xi}.$$

Для многообразий Кенмоцу, также, оказываются верными следующие равенства: $(\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\varphi)\vec{y} = g(\vec{x},\vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y})$, $L_{\vec{\xi}}g = 2(g - \eta\otimes\eta)$.

Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha,\beta,\gamma = 1,...,n; a,b,c = 1,...,n-1)$ многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \vec{\xi}$ [6]- [7]. Пусть $P : TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D\oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n$ порождают распределение D: $D = Span(\vec{e}_a)$. Неголономное поле базисов $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ будет активно использоваться в процессе проведения вычислений. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a,\vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Из условия $\vec{\xi}\in\ker\omega$ следует, что $\partial_n\Gamma^n_a = 0$. Пусть $K(x^\alpha)$ и $K'(x^{\alpha'})$ — адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x^{a'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'})$.

Преобразование компонент допустимого тензорного поля t в адаптированных координатах подчиняется следующему закону [8]: $t^a_b = A^a_{a'}A^{b'}_b t^{a'}_{b'}$, где $A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$.

Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t^a_b$ являются компонентами допустимого тензорного поля. Заметим, что обращение в нуль производных $\partial_n t^a_b$ не зависит от выбора адаптированных координат.

Пусть $\psi : D \to D$ - эндоморфизм, определяемый равенством $\omega(\vec{x},\vec{y}) = g(\psi\vec{x},\vec{y})$. Имеет место следующее предложение [9].

Предложение 1. *Коэффициенты связности Леви-Чивита почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид:* $\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $\widetilde{\Gamma}^n_{ab} = \omega_{ba} - C_{ab}$, $\widetilde{\Gamma}^b_{an} = \widetilde{\Gamma}^b_{na} = C^b_a + \psi^b_a$, $\widetilde{\Gamma}^n_{na} = \widetilde{\Gamma}^a_{nn} = 0$, *где* $C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab}$, $C^a_b = g^{da}C_{db}$, $\psi^c_a = g^{bc}\omega_{ab}$.

Для многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах получаем: $C_{ab} = g_{ab}$, $C^b_a = \delta^b_a$, $\omega_{ba} = 0$, $\psi^c_a = 0$.

Таким образом, в качестве следствия предложения 1 получаем предложение 2.

Предложение 2. *Коэффициенты связности Леви-Чивита многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах имеют вид:* $\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $\widetilde{\Gamma}^n_{ab} = -g_{ab}$, $\widetilde{\Gamma}^b_{an} = \widetilde{\Gamma}^b_{na} = \delta^b_a$, $\widetilde{\Gamma}^n_{na} = \widetilde{\Gamma}^a_{nn} = 0$.

Внутренней линейной связностью ∇ на многообразии с почти контактной метрической структурой [9] называется отображение $\nabla : \Gamma(D)\times\Gamma(D)\to\Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$1)\nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}};$$

$$2)\nabla_{\vec{x}}f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y},$$

$$3)\nabla_{\vec{x}}(\vec{y}+\vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z},$$

где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c$. Из равенства $\vec{e}_a = A^{a'}_a\vec{e}_{a'}$, где $A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности: $\Gamma^c_{ab} = A^{a'}_a A^{b'}_b A^c_{c'}\Gamma^{c'}_{a'b'} + A^c_{c'}\vec{e}_a A^{c'}_b$.

Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным $S(\vec{x},\vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x},\vec{y}]$.

Таким образом, в адаптированных координатах мы имеем $S^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba}$.

На почти контактном метрическом многообразии внутреннюю связность всегда можно получить с помощью равенства $\nabla_{\vec{x}}\vec{y} = P\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y}$, $\vec{x},\vec{y}\in\Gamma(D)$. Как мы видим, $\Gamma^c_{ab} = \tilde{\Gamma}^c_{ab}$.

3. Основные понятия геометрии неголономных многообразий Кенмоцу

Гладкое многообразие M с заданной на нем почти контактной нормальной метрической структурой $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g)$ назовем неголономным многообразием Кенмоцу, если выполняется равенство $L_{\vec{\xi}}g = 2(g-\eta\otimes\eta)$.

Предложение 3. *Коэффициенты связности Леви-Чивита неголономного многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах имеют вид:* $\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $\widetilde{\Gamma}^n_{ab} = \omega_{ba} - g_{ab}$, $\widetilde{\Gamma}^b_{an} = \widetilde{\Gamma}^b_{na} = \delta^b_a + \psi^b_a$, $\widetilde{\Gamma}^n_{na} = \widetilde{\Gamma}^a_{nn} = 0$.

Результаты предложения 3 использовались при доказательстве предложения 4.

Предложение 4. *Почти контактное метрическое многообразие является неголономным многообразием Кенмоцу тогда и только тогда, когда*

$$(\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\varphi)\vec{y} = \eta(\vec{y})F\vec{x} - (\omega(\vec{x},\varphi\vec{y}) - g(\vec{x},\varphi\vec{y}))\vec{\xi},$$

где $F = -\varphi - \psi\circ\varphi$.

Доказательство предложения опирается на равенство $L_{\vec{\xi}}g = 2(g-\eta\otimes\eta)$, а также на результаты работы [9], в которой было показано, что почти контактная метрическая структура нормальна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) $L_{\vec{\xi}}\varphi = 0$,
2) $\nabla\varphi = 0$,
3) $\omega(\varphi\vec{x},\varphi\vec{y}) = \omega(\vec{x},\vec{y})$.

Пример неголономного многообразия Кенмоцу. Пусть $M = \mathbb{R}^3$. (∂_α) $(\alpha = 1,2,3)$ — стандартный базис арифметического пространства. Определим на M 1-форму η, полагая, $\eta = dx^3 + x^2dx^1$. Пусть $\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2\partial_3$, $\vec{e}_2 = \partial_2$, $\vec{e}_3 = \partial_3$, $D = Span(\vec{e}_1,\partial_2)$. Определим метрический тензор, полагая $g(\vec{e}_1,\vec{e}_1) = g(\vec{e}_2,\vec{e}_2) = e^{2x^3}$, $g(\vec{e}_3,\vec{e}_3) = 1$. Тем самым, добиваемся выполнения равенства $L_{\vec{\xi}}g = 2(g-\eta\otimes\eta)$. Структурный эндоморфизм зададим равенствами

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_2,\ \varphi(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1,\ \varphi(\vec{e}_3) = \vec{0}.$$

Отсюда непосредственно следует, что $L_{\vec{\xi}}\varphi = 0$ и

$$\omega(\varphi(\vec{e}_1),\varphi(\vec{e}_2)) = -\omega(\vec{e}_2,\vec{e}_1) = \omega(\vec{e}_1,\vec{e}_2).$$

Последнее означает выполнение равенства $\omega(\varphi\vec{x},\varphi\vec{y}) = \omega(\vec{x},\vec{y})$.

Проводя непосредственные вычисления, убеждаемся в том, что ненулевыми компонентами связности Леви-Чивита являются следующие коэффициенты: $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{21} = -\Gamma^1_{22} = -x^2$. Таким образом, $\nabla\varphi = 0$.

В теореме 1 утверждается, что как и в голономном случае [1], тензор Схоутена-Вагнера в неголономном многообразии Кенмоцу равен нулю. Это следует из того, что в обоих случаях выполняется равенство $[\vec{e}_a,\partial_n] = 0$.

Теорема 1. *Тензор Схоутена-Вагнера внутренней связности неголономного многообразия Кенмоцу равен нулю.*

Доказательство. Используя равенство $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, получаем: $2g_{ae}\Gamma^a_{bc} = \vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}$. Продифференцируем обе части последнего равенства по x^n. Используя $L_{\vec{\xi}} g = 2(g - \eta \otimes \eta)$, или, в адаптированных координатах, $\partial_n g_{ab} = 2g_{ab}$, получаем:

$$4g_{ae}\Gamma^a_{bc} + 2g_{ae}\Gamma^a_{bc} = 2(\vec{e}_b g_{ce} + \vec{e}_c g_{be} - \vec{e}_e g_{bc}).$$

Отсюда следует, что $\partial_n \Gamma^a_{bc} = 0$. □

4. Неголономное многообразие Кенмоцу с N-связностью

N-связность ∇^N определяется на почти контактном метрическом многообразии, наделенном внутренней связностью ∇ и эндоморфизмом $N : D \to D$ гладкого распределения D, как единственная связность на многообразии M, удовлетворяющая следующим условиям [9]:

1) $\nabla^N_{\vec{x}} \vec{y} \in \Gamma(D)$, 2) $\nabla^N_{\vec{x}} \vec{\xi} = \vec{0}$, 3) $\nabla^N_{\vec{\xi}} \vec{y} = [\vec{\xi}, \vec{y}] + N\vec{y}$, 4) $\nabla^N_{\vec{y}} \vec{z} = \nabla_{\vec{y}} \vec{z}$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$, $\vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$.

Если ∇ — метрическая связность, то связность ∇^N характеризуется следующими условиями [9]:

1) $S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$;
2) $\nabla^N_{\vec{x}} g(\vec{y}, \vec{z}) = 0$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$;
3) $\nabla^N_{\vec{x}} \vec{\xi} = 0$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$;
4) $\nabla^N_{\vec{x}} \eta = 0$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$.

Предложение 5. *[9] Ненулевые компоненты тензора кривизны $K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$, связности ∇^N в адаптированных координатах принимают следующий вид:*

$$K^d_{abc} = R^d_{abc}, \ K^d_{nbc} = -\nabla_b N^d_c.$$

Здесь R^c_{bad} — компоненты тензора Схоутена в адаптированных координатах [10]: $R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a||e||}\Gamma^e_{b]c}$.

N-связность относится к связностям с кручением, определяемым на почти контактных метрических многообразиях [10].

Найдем условия, при которых связность ∇^N является метрической связностью. В адаптированных координатах равенство $\nabla^N g = 0$ переписывается в виде:

$\nabla^N_c g_{ab} = \vec{e}_c g_{ab} - \Gamma^d_{ca} g_{db} - \Gamma^d_{cb} g_{ad} = 0$,
$\nabla^N_c g_{ab} = \partial_n g_{ab} - N^c_a g_{cb} - N^c_b g_{ac} = 0$.

Учитывая, что для неголономного многообразия Кенмоцу $\partial_n g_{ab} = 2g_{ab}$, из последнего равенства получаем $2g_{ab} = N^c_a g_{cb} + N^c_b g_{ac}$.

Тем самым, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. *N-связность ∇^N является метрической тогда и только тогда, когда выполняется следующее равенство: $2g_{ab} = N^c_a g_{cb} + N^c_b g_{ac}$.*

Найдем, ограничение на эндоморфизм N, при котором связность ∇^N сохраняет структурный эндоморфизм неголономного многообразия Кенмоцу.

Рассмотрим равенство $\nabla^N_n \varphi^b_a = \partial_n \varphi^b_a + N^b_c \varphi^c_a - N^c_a \varphi^b_c = 0$.

Учитывая, что неголономное многообразие Кенмоцу является нормальным почти контактным метрическим многообразием, убеждаемся в справедливости теоремы 3.

Теорема 3. *N-связность сохраняет ∇^N структурный эндоморфизм φ неголономного многообразия Кенмоцу тогда и только тогда, когда эндоморфизмы N и φ коммутируют: $N^b_c \varphi^c_a - N^c_a \varphi^b_c = 0$.*

Последнее равенство выполняется, в частности, если $N = \varphi$.

Список литературы

1. Букушева А.В. О геометрии многообразий Кенмоцу с N-связностью // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — 2019. — № 50. — С. 48–60.

2. Букушева А.В., Галаев С.В. Связности над распределением и геодезические пульверизации // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2013. — № 4. — С. 10–18.

3. Букушева А.В., Галаев С.В. О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к неголономному многообразию // Математика. Механика. — 2005. — № 7. — С. 12–14.

4. Kenmotsu K. A class of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. — 1972. — Vol. 24. — P. 93–103.

5. Pitis G. Geometry of Kenmotsu manifolds. — Brasov : Publishing House of Transilvania University of Brasov, 2007.

6. Букушева А.В., Галаев С.В. Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 3. — С. 17–22.

7. Галаев С.В. Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика. — 2016. — Т. 16, № 3. — С. 263–272.

8. Галаев С.В. N-продолженные симплектические связности в почти контактных метрических пространствах // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2017. — № 3. — С. 15–23.

9. Bukusheva A.V., Galaev S.V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov Series III: Mathematics, Informatics, Physics. — 2011. — Vol. 4(53), no. 2. — P. 13–22.

10. Гордеева И.А., Паньженский В.И., Степанов С.Е. Многообразия Римана-Картана // Итоги науки и техники (совр. мат-ка и ее прил-я). — 2009. — Т. 123. — С. 110–141.

11. Букушева А.В., Галаев С.В. Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — 2017. — № 48. — С. 32–41.

12. Галаев С.В. Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств // Чебышевский сборник. — 2016. — Т. 17, № 3(59). — С. 53–63.