УДК 514

Плоские кососимметрические связности на многообразиях Сасаки

Галаев С.В.
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, г. Саратов
sgalaev@mail.ru

Аннотация

Кососимметрической N-связностью на почти контактном метрическом многообразии M называется полу-метрическая N-связность ∇^N с кососимметрическим кручением. Задание на многообразии M полу-метрической N-связности эквивалентно заданию пары (∇, N), где ∇ — внутренняя метрическая связность, $N : D \to D$ — эндоморфизм распределения D. Полу-метрическая N-связность с кососимметрическим кручением на почти контактном метрическом многообразии определена однозначно и является метрической тогда и только тогда, когда структурное поле $\vec{\xi}$ киллингово. Доказывается, что в случае многообразия Сасаки метрическая кососимметрическая N-связность плоская тогда и только тогда, когда тензор Схоутена внутренней связности обращается в нуль.

Ключевые слова: многообразие Сасаки, внутренняя связность, плоская связность с кососимметрическим кручением, тензор Схоутена.

1. Введение

Особый интерес в контексте приложения римановой геометрии к теоретической физике вызывают римановы многообразия, оснащенные метрической связностью с кручением [1,2]. Пусть $\tilde{\nabla}$ — связность Леви-Чивита риманова многообразия M, а ∇^N - метрическая связность с кручением $S(\vec{x},\vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - [\vec{x},\vec{y}]$. Известно [2], что если тензорное поле $\tilde{S}(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = g(S(\vec{x},\vec{y}),\vec{z})$ называемое нами также тензором кручения метрической связности, кососимметрично по всем аргументам, то многообразия $(M, \tilde{\nabla})$ и (M, ∇^N) находятся в проективном соответствии. Подробному описанию положения дел в области исследования (псевдо) римановых многообразий, оснащенных связностью (метрической или нет) приведено в работе [1]. Там же указано на то, что в случае почти контактных метрических многообразий основным объектом исследования являлись конкретные классы связностей с кручением — полусимметрические и четверть-симметрические связности.

В работе [3] автором настоящей статьи исследовались связности, определяемые на субримановом многообразии M контактного типа. Многообразие M оснащено субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g)$, где η и $\vec{\xi}$ 1-форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и $D^{\perp}$. Указанные связности ассоциируются с парой (∇, N), где ∇ — внутренняя метрическая связность, а $N : D \to D$ — эндоморфизм распределения D, названный в работе [3] структурным эндоморфизмом. Субриманово многообразие нечетной размерности, оснащенное дополнительно эндоморфизмом $\varphi : D \to D$ таким, что $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}$, называется почти контактным метрическим многообразием. Для почти контактных метрических многообразий, образующих специальный класс римановых многообразий, естественным является выбор связности Леви-Чивита. Однако, в ряде случаев, больший интерес представляют связности, обеспечивающие параллельный перенос допустимых векторов (принадлежащих распределению D) вдоль допустимых кривых (касающихся распределения D).

В работе [3] было доказано, что на субримановом многообразии существует единственная N-связность ∇^N с ненулевым кососимметрическим кручением S, которая является метрической тогда и только тогда, когда выполняется равенство $L_{\vec{\xi}}g = 0$. Там же была доказана теорема, утверждающая, что полу-метрическая N-связность с кососимметрическим кручением, заданная на субримановом многообразии контактного типа, является плоской тогда и только тогда, когда тензор Схоутена субриманова многообразия обращается в нуль и $\nabla N = 0$. В настоящей работе указанные выше результаты уточняются для случая сасакиева многообразия. А именно, доказывается, что метрическая связность N-связность с кососимметрическим кручением является плоской тогда и только тогда, когда тензор Схоутена многообразия Сасаки обращается в нуль.

2. Основные свойства полу-метрической N-связности с кососимметрическим кручением, определяемой на многообразии Сасаки

Пусть M — гладкое многообразие размерности $n = 2m + 1$, $m \geq 1$ с заданной на нем сасакиевой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g, \varphi, D)$, где η и $\vec{\xi}$ 1-форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и $D^{\perp}$.

Известно [4], [5], что на почти контактном метрическом многообразии существует единственная внутренняя связность ∇ с нулевым кручением, такая, что $\nabla_{\vec{x}} g(\vec{y}, \vec{z}) = 0$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$. Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным $S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}]$, где $P : TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^{\perp}$.

Пусть $K(x^{\alpha})$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n; a, b, c = 1, ..., n-1)$ — карта многообразия M, адаптированная к распределению D [6]. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ порождают систему D: $D = Span(\vec{e}_a)$. На многообразии M, таким образом, мы получаем неголономное поле базисов $(\vec{e}_{\alpha}) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ и сопряженное ему поле кобазисов $(dx^a, \eta = \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$.

Пусть $\tilde{\nabla}$ — связность Леви-Чивита и $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha}$ — ее коэффициенты. В результате непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 1. *Коэффициенты связности Леви-Чивита многообразия Сасаки в адаптированных координатах имеют вид:*
$\widetilde{\Gamma}_{ab}^{c} = \Gamma_{ab}^{c}$, $\widetilde{\Gamma}_{ab}^{n} = \omega_{ba}$, $\widetilde{\Gamma}_{an}^{b} = \widetilde{\Gamma}_{na}^{b} = -\varphi_a^b$, $\widetilde{\Gamma}_{na}^{n} = \widetilde{\Gamma}_{nn}^{a} = 0$,
где $\Gamma_{bc}^{a} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$.

Известно [3], что если $N : TM \to TM$ — эндоморфизм касательного расслоения многообразия M такой, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$, то на многообразии M существует единственная линейная связность ∇^N с кручением $S(\vec{x}, \vec{y})$, однозначно определяемая следующими условиями:

1) $S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$;
2) $\nabla_{\vec{x}}^{N} = \nabla_{\vec{x}}\vec{y}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$;
3) $\nabla_{\vec{x}}^{N}\vec{y} = 0$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$.

В адаптированных координатах отличными от нуля коэффициентами связности ∇^N являются $G_{bc}^{a} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $G_{na}^{b} = N_a^b$.

Связность ∇^N названа нами полу-метрической связностью, поскольку $\nabla_{\vec{x}}^{N} g(\vec{y}, \vec{z}) = \vec{0}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$.

Положим $\tilde{S}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = g(S(\vec{x}, \vec{y}), \vec{z})$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$. В адаптированных координатах возможно ненулевые компоненты тензора $\tilde{S}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ будут иметь следующий вид:
$\tilde{S}(\vec{e}_a, \vec{e}_b, \partial_n) = 2\omega_{ab}$,
$\tilde{S}(\vec{e}_a, \partial_n, \vec{e}_b) = -g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b)$,
$\tilde{S}(\partial_n, \vec{e}_a, \vec{e}_b) = g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b)$.

Как видно из полученных равенств, тензор $\tilde{S}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ кососимметричен тогда и только тогда, когда $2\omega_{ab} = g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b)$ или, $2\omega_{ab} = g_{bc}N_a^c$. Отсюда получаем $N_a^c = 2g^{cb}\omega_{ab}$. Таким образом, в силу равенства $\varphi_a^b = g^{bc}\omega_{ca}$ окончательно получаем: $N_a^c = -2\varphi_a^c$. Тем самым, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Линейная связность ∇^N, заданная на многообразии Сасаки, кососимметрична тогда и только тогда, когда $N = -2\varphi$.*

В дальнейшем будем полагать, что для связности ∇^N выполняется условие $N = -2\varphi$.

Теорема 2. *Линейная связность ∇^N с эндоморфизмом $N = -2\varphi$, заданная на многообразии Сасаки, является метрической связностью.*

Доказательство. Из определения связности ∇^N следует, что $\nabla_c^N g_{ab} = 0$. Вычислим $\nabla_n^N g_{ab}$. Имеем:

$$\nabla_n^N g_{ab} = \partial_n g_{ab} - 2\varphi_a^c g_{cb} + 2\varphi_b^c g_{ac} = \partial_n g_{ab} + 2g^{cd}\omega_{da} g_{cb} + 2g^{cd}\omega_{db} g_{ac} = \partial_n g_{ab} + 2\omega_{ab} + 2\omega_{ba} = \partial_n g_{ab}.$$

Учитывая, что для многообразия Сасаки $\partial_n g_{ab} = 0$, убеждаемся в справедливости теоремы. □

Пусть $K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$ тензор кривизны связности ∇^N. Вычислим ненулевые компоненты тензора $K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$. Имеем:

$K_{abc}^d = R_{abc}^d$, $K_{anc}^d = \nabla_a N_c^d$.

Здесь $R_{abc}^d = 2\vec{e}_{[a}\Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a||e||}^d \Gamma_{b]c}^e$ — компоненты тензора кривизны Схоутена [6], определяемого равенством

$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]}\vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}]$, $Q = 1 - P$,

Инвариантное представление тензора $K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$ имеет вид:

$K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} + \eta(\vec{y})(\nabla_{\vec{x}} N)\vec{z} - \eta(\vec{x})(\nabla_{\vec{y}} N)\vec{z}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$.

Известно [6], что, так как многообразие Сасаки является нормальным многообразием, то имеет место равенство $\nabla\varphi = 0$ и, следовательно, $\nabla N = 0$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Полу-метрическая N-связность с кососимметрическим кручением, заданная на многообразии Сасаки M, является плоской тогда и только тогда, когда тензор Схоутена многообразия M обращается в нуль.*

Список литературы

1. Гордеева И.А., Паньженский В.И., Степанов С.Е. Многообразия Римана-Картана // Итоги науки и техники (совр. мат-ка и ее прил-я). — 2009. — Т. 123. — С. 110–141.

2. Agricola I., Friedrich Th. On the holonomy of connections with skew-symmetric torsion // Math. Ann. — 2004. — Vol. 328. — P. 711–748.

3. Галаев С.В. Плоские полу-метрические кососимметрические связности на субримановых многообразиях // Современная геометрия и ее приложения. Сборник трудов Международной научной конференции (Казань, 4-7 сентября 2019 г.). — Казань, 2019. — С. 46–49.

4. Букушева А.В., Галаев С.В. Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — 2017. — № 48. — С. 32–41.

5. Галаев С.В. Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика. — 2017. — Т. 17, № 2. — С. 138–147.

6. Bukusheva A.V., Galaev S.V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov Series III: Mathematics, Informatics, Physics. — 2011. — Vol. 4(53), no. 2. — P. 13–22.