УДК 517.95

Одномерная задача неизотермической фильтрации жидкости в вязкой пористой среде

Вирц Р.А.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
virtsrudolf@gmail.com

Аннотация

Изучается математическая модель неизотермической фильтрации жидкости в вязкой пористой среде. Рассматривается система дифференциальных уравнений, состоящая из уравнений сохранения массы каждой из фаз, закона Дарси, реологического соотношения, закона сохранения баланса сил и уравнения для температуры среды. Исходная система сводится к уравнению для пористости третьего порядка и уравнению второго порядка для температуры.

Ключевые слова: Пористость, фильтрация, закон Дарси, неизотермическое движение, вязкость, переменные Лагранжа, температура

1. Постановка задачи

В работе изучается следующая система уравнений составного типа:

$$\frac{\partial \phi \rho_f}{\partial t} + div(\phi \vec{v}_f \rho_f) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho_s (1-\phi)}{\partial t} + div((1-\phi)\vec{v}_s \rho_s) = 0, \tag{2}$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -k(\phi)(\nabla p_f + \rho_f \vec{g}), \tag{3}$$

$$div v_s = -a_1(\phi) p_e - a_2(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{v}_s \cdot \nabla p_e), \tag{4}$$

$$\nabla p_{tot} - \rho_{tot} \vec{g} = 0, \tag{5}$$

$$(\sum_1^2 \rho_i c_i \alpha_i)\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\sum_1^2 \rho_i c_i \alpha_i \vec{v}_i)\nabla\theta = div(K\nabla\theta). \tag{6}$$

Система (1) – (6) решается в области $(\vec{x}, t) \in Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \in R^n$, при краевых и начальных условиях

$$\vec{v}_s\mid_{\partial Q_T} = \vec{v}_f \mid_{\partial Q_T} = 0, \quad \phi\mid_{t=0} = \phi^0(x), \quad \theta\mid_{t=0} = \theta^0(x), \quad \theta(0,t) = \theta_0(t), \quad \theta(1,t) = \theta_1(t).$$

Данная система описывает нестационарное неизотермическое движение жидкости в вязкой пористой среде. Здесь $\rho_i, \vec{v_i}, i = s, f$ – соответственно истинные плотности и скорости твердой и жидкой фаз; ϕ – пористость; $p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s$ – общее давление; $\rho_{tot} = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s$ – плотность двухфазной среды; p_f, p_s – соответственно давления жидкой и твердой фаз; $p_e = p_{tot} - p_f$ – эффективное давление; θ – температура среды; $K = K_f\phi + (1-\phi)K_s$ – теплопроводность, где K_f – теплопроводность жидкой фазы, K_s

– теплопроводность пористого скелета; $c_i = const > 0$ – удельная теплоемкость i - й фазы при постоянном объеме; α_i – объемная концентрация; $\alpha_1 = \phi, \alpha_2 = 1 - \phi$; $\vec{g}$ – вектор силы тяжести; $k(\phi)$ – коэффициент фильтрации; $a_1(\phi)$ – коэффициент объемной вязкости; $a_2(\phi)$ – коэффициент объемной сжимаемости. Плотности жидкой и твердой фаз считаются постоянными. Задача записана в эйлеровых координатах $(x, t) \in Q_T$. Модель, исследуемая в работе, применима для описания процесса движения магмы в земной коре [1]. Близкие по структуре системы уравнений рассматривались в работах [2–9].

2. Переменные Лагранжа

В одномерном случае в массовых лагранжевых переменных получим следующую систему уравнений [10]

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + (1-\phi)^2 \frac{\partial v_s}{\partial x} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\phi(v_f - v_s)) = 0, \tag{8}$$

$$\phi(v_f - v_s) = -k(\phi)((1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g), \tag{9}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot} g, \tag{10}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x} = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial t}, \tag{11}$$

$$Q\frac{\partial \theta}{\partial t} = (1-\phi)\frac{\partial}{\partial x}(K(1-\phi)\frac{\partial \theta}{\partial x}) + (1-\phi)\frac{\partial \theta}{\partial x}(Qv_s - V), \tag{12}$$

где $Q = \rho_f c_1 \phi + \rho_s c_2 (1-\phi)$, $V = \rho_f c_1 \phi v_f + \rho_s c_2 (1-\phi) v_s$.

Второе уравнение системы с учетом закона Дарси принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi}{1-\phi}) - \frac{\partial}{\partial x}(k(\phi)((1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g)) = 0. \tag{13}$$

Далее рассмотрим случай когда $a_2(\phi) = 0$. Коэффициент вязкости $a_1(\phi)$ зависит от температуры θ и равен $a_1(\phi) = \phi^m/\eta$, где $\eta = \eta_r exp\left(\frac{Q(1-\theta/\theta_r)}{R\theta}\right)$ [11]. Здесь η_r является вязкостью при исходной температуре θ_r, Q – энергия активации ползучести, R – универсальная газовая постоянная. Из (7) и (11) следует уравнение

$$\frac{1}{1-\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} = -a_1(\phi)(p_{tot} - p_f).$$

Это уравнение можно представить в виде

$$p_{tot} - p_f = -\frac{\partial G(\phi)}{\partial t}, \tag{14}$$

где функция $G(\phi)$ определяется равенством

$$\frac{dG}{d\phi} = \frac{1}{a_1(\phi)(1-\phi)}.$$

Уравнение (13) с учетом (10) и (14) перепишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(\phi)(1-\phi)\frac{\partial^2 G(\phi)}{\partial x \partial t} - k(\phi) g(\rho_{tot} + \rho_f)\right). \tag{15}$$

Для удобства численного исследования сведем уравнение (15) к системе двух уравнений. Пусть $z = \frac{\partial G(\phi)}{\partial t}$, тогда получим два уравнения для определения функций z и ϕ

$$\frac{za_1(\phi)}{1-\phi} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(\phi)(1-\phi)\frac{\partial z}{\partial x} - k(\phi)g(\rho_{tot}+\rho_f)\right), \tag{16}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = za_1(\phi)(1-\phi). \tag{17}$$

Из уравнений (7) и (8) имеем

$$\frac{\partial v_s}{\partial x} = \frac{1}{(1-\phi)^2}\frac{\partial \phi}{\partial t},$$

$$\frac{\partial v_f}{\partial x} = \frac{1}{\phi}(v_s - v_f)\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial x} - \frac{1}{\phi(1-\phi)^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Тогда с учетом (17) получим уравнения для нахождения скоростей жидкой и твердой фаз

$$\frac{\partial v_s}{\partial x} = \frac{za_1(\phi)}{1-\phi},$$

$$\frac{\partial v_f}{\partial x} = \frac{1}{\phi}(v_s - v_f)\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{za_1(\phi)(\phi+1)}{\phi(1-\phi)}.$$

Пусть в исходной области в переменных Эйлера на границах берутся условия $v_s\mid_{x=0,x=1} = v_f\mid_{x=0,x=1} = 0$, тогда учитывая (9) приходим к задаче для отыскания функций $z, \phi, v_s, v_f, \theta$

$$\begin{gathered} \tfrac{za_1(\phi)}{1-\phi} = \tfrac{\partial}{\partial x}\left(k(\phi)(1-\phi)\tfrac{\partial z}{\partial x} - k(\phi)g(\rho_{tot}+\rho_f)\right), \\ \left(k(\phi)(1-\phi)\tfrac{\partial z}{\partial x} - k(\phi)g(\rho_{tot}+\rho_f)\right)\mid_{x=0,x=1} = 0, \end{gathered} \tag{18}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = za_1(\phi)(1-\phi), \quad \phi(x,0) = \phi^0(x), \tag{19}$$

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial v_s}{\partial x} = \tfrac{za_1(\phi)}{1-\phi}, \quad \tfrac{\partial v_f}{\partial x} = \tfrac{1}{\phi}(v_s - v_f)\tfrac{\partial \phi}{\partial x} + \tfrac{za_1(\phi)(\phi+1)}{\phi(1-\phi)}, \\ v_s\mid_{x=0,x=1} = v_f\mid_{x=0,x=1} = 0, \end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered} Q\tfrac{\partial \theta}{\partial t} = (1-\phi)\tfrac{\partial}{\partial x}(K(1-\phi)\tfrac{\partial \theta}{\partial x}) + (1-\phi)\tfrac{\partial \theta}{\partial x}(Qv_s - V), \\ \theta(x,0) = \theta^0(x), \quad \theta(0,t) = \theta_0(t), \quad \theta(1,t) = \theta_1(t). \end{gathered} \tag{21}$$

Система уравнений (18) – (21) может быть решена численно. Алгоритм счета следующий: из уравнения (18), используя начальное значение для пористости и температуры, находим z_i^1, далее из уравнений (19) и (20) находим ϕ на следующем временном слое и скорости фаз. Следующим шагом будет нахождение θ_i^1 из уравнения (21). Повторяем алгоритм M раз, где M – количество разбиений пространственной сетки.

3. Заключение

В работе получена система, состоящая из уравнений для пористости, скоростей фаз и температуры в переменных Лагранжа. Предложен алгоритм численного решения полученной начально – краевой задачи.

Список литературы

1. Fowler A. Mathematical Geoscience.— Springer-Verlag London Limited, 2011.— DOI: 10.1007/s11004-012-9399-0.

2. Simpson M., Spiegelman M., Weinstein C.I. Degenerate dispersive equations arising in the stady of magma dynamics // Nonlinearty.— 2007.— Vol. 20.— DOI: 10.1088/0951-7715/20/1/003.

3. Abourabia A.M., Hassan K.M., Morad A.M. Analytical solutions of the magma equations for molten rocks in a granular matrix // Chaos Solutions Fract. — 2009. — Vol. 42. — DOI: 10.1016/j.chaos.2009.03.078.

4. Geng Y., Zhang L. Bifurcations of traveling wave solutions for the magma equations // Applied Mathematics and computation.— 2010.— Vol. 217.— DOI: 10.1016/j.amc.2009.11.035.

5. Вирц Р.А., Папин А.А., Вайгант В.А. Численное решение одномерной задачи фильтрации несжимаемой жидкости в вязкой пористой среде // Известия Алтайского государственного университета. — 2018. — № 4(102). — DOI: 10.14258/izvasu(2018)4-11.

6. Koleva M.N., Vulkov L.G. Numerical analysis of one dimensional motion of magma without mass forces // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2019. — Vol. 366. — DOI: 10.1016/j.cam.2019.07.003.

7. Токарева М.А., Вирц Р.А. Аналитическое и численное исследование задачи фильтрации в пороупругой среде // Сборник трудов Всероссийской конференции по математике “МАК-2016”. — Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2016.

8. Dushin V.R., Nikitin V.F., Legros J.C., Silnikov M.V. Mathematical modeling of flows in porous media // WSEAS Transactions on Fluid Mechanics. — 2014. — Vol. 9.

9. Байкин А.Н. Динамика трещины гидроразрыва пласта в неоднородной пороупругой среде : Дисс... канд. физ.-мат. наук / Байкин А.Н. — Новосибирск, 2016.

10. Papin A.A., Tokareva M.A. On Local solvability of the system of the equation of one dimensional motion of magma // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2017. — T. 10, № 3. — DOI: 10.17516/1997-1397-2017-10-3-385-395.

11. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Temperature-dependent viscoelastic compaction and compartmentalization in sedimentary basins // Tectonophysics.— 2000.— Vol. 324, no. 3. — P. 137–168.