УДК 517.958

Устойчивость двухфазных течений в пороупругой среде

Глушкова А.А., Папин А.А.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
anka98-98@mail.ru, papin@math.asu.ru

Аннотация

В работе рассмотрена устойчивость для системы уравнений одномерного стационарного движения двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде.

Ключевые слова: двухфазная фильтрация, пороупругая среда, устойчивость, линейные системы, закон Дарси.

1. Постановка задачи

В работе изучается следующая квазилинейная система уравнений составного типа:

$$\frac{\partial \rho_i^0 \phi s_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i^0 \phi s_i u_i) = 0, \tag{1}$$

$$s_i \phi (u_i - u_3) = -K_0 \frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i}(\frac{\partial p_i}{\partial x} - \rho_i^0 g), \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

$$\frac{\partial (1-\phi)\rho_3^0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_3^0 (1-\phi) u_3) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = -a_1(\phi) p_e - a_2(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t} + u_3 \frac{\partial p_e}{\partial x}), \tag{4}$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot} g, \tag{5}$$

описывающая одномерное нестационарное движение двухфазной смеси в деформируемой пористой среде [1]. Здесь ϕ - пористость, ρ_i^0, u_i - соответственно истинная плотность и скорость i - фазы (i = 1 - вода, i = 2 - нефть, i = 3 - твердый скелет), s_i - насыщенность жидких фаз ($s_1 + s_2 = 1$) , p_1, p_2 - давление жидких фаз ($p_2 = p_1 + p_c, p_c$ - капиллярное давление), $p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi) p_s$ - общее давление, $p_f = s_1 p_1 + s_2 p_2$ - давление жидкой фазы, $\rho_{tot} = (1-\phi)\rho_3^0 + \phi s_1 \rho_1^0 + \phi s_2 \rho_2^0$ - плотность среды, $p_e = p_{tot} - p_f$ - эффективная давление, $a_1(\phi), a_2(\phi)$ - параметры горной породы, $K_0(\phi)$ - тензор фильтрации, $\overline{k_{0i}}(s_i)$ - относительные фазовые проницаемости, μ_i - коэффициент динамической вязкости (в приложениях $a_1(\phi) = \phi^m/\nu, a_2(\phi) = \eta^b \beta_\phi$, где $b = 1/2, m \in [0; 2]$, η, β_ϕ, ν − положительные параметры пороупругой среды). Система (1)-(5) записана в эйлеровых координатах (x, t).

Искомыми являются величины $\phi, u_1, u_2, u_3, p_1, p_2, p_s, s_1, s_2$. Система (1)-(5) близка по структуре к системе уравнений двухфазной фильтрации в упругой пористой среде [2], но отличается уравнениями движения твердого скелета. При известной пористости уравнения движения третьей фазы игнорируются и система (1)-(5) совпадает с классической системой Маскета-Леверетта [3, 4] и ее аналогами [5, 6]. Однофазные задачи для системы (1)-(5) ($s_1 = 1, s_2 = 0$) рассмотрены в [7]. В [8–10] для (1)-(5) рассмотрена задача поршневого вытеснения Н.Н. Веригина в случае отсутствия капиллярного скачка.

2. Стационарное решение системы уравнений (1)-(5)

Получим аналитическое решение системы (1)-(5). Будем использовать следующие гипотезы:

(i) жидкости и твердый скелет несжимаемы, т.е., $\rho_i^0 = const, i = 1,2,3$;

(ii) ускорения силы тяжести и капиллярный скачок равны нулю: $g = 0, p_c = 0$. При этих предположениях из уравнения (4) следует $p_{tot} = p_{tot}^0 = const$. Поскольку $p_c = 0$, то $p_1 = p_2 = p_f \equiv p$ и, следовательно,

$$\phi p + (1-\phi)p_s = p_{tot}^0.$$

В установившемся движении скорости равны нулю ($u_i = 0, i = 1,2,3$), пористости и насыщенности являются постоянными

$$\phi = \phi^0, \quad s_i = s_i^0, \quad (\phi^0, s_i^0) \in (0,1).$$

При сделанных предположениях уравнения (1)-(5) выполняются автоматически. Из уравнения (5) следует, что $p_e = 0$, т.е. $p_{tot} = p_f = p_{tot}^0$. Итак, стационарное решение (1)-(5) с учетом (6) есть

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0, \quad \phi = \phi^0, \quad s_i = s_i^0, \quad p_1 = p_2 = p_s = p_{tot}^0.$$

3. Возмущенное решение

Решение системы (1)-(5) ищется в окрестности стационарного решения в виде

$$u_i = \overline{u_i}, \quad p_i = p_i^0 + \overline{p_i}, \quad s_1 = s_1^0 + \overline{s_1}, \quad s_2 = s_2^0 + \overline{s_2},$$

$$s_1^0 + s_2^0 = 1, \quad \overline{s_1} + \overline{s_2} = 0, \quad \phi = \phi^0 + \overline{\phi}, (0 \le \phi^0 + \overline{\phi} \le 1),$$

где функции $\overline{u_i}, \overline{s_i}, \overline{p_i}, \overline{\phi}$ малы и имеют непрерывные производные. Функциональные параметры $K_0(\phi), k_{0i}(s_i), a_1(\phi), a_2(\phi)$ представимы в виде

$$K_0(\phi) = K_0(\phi^0) + K_0'(\phi^0)\overline{\phi},$$

$$\overline{k_{0i}}(s_i) = \overline{k_{oi}}(s_i^0) + \overline{k_{oi}'}(s_i^0)\overline{s_i},$$

$$a_1(\phi) = a_1(\phi^0) + a_1'(\phi^0)\overline{\phi},$$

$$a_2(\phi) = a_2(\phi^0) + a_2'(\phi^0)\overline{\phi}.$$

Подставляя возмущенное решение в (1)-(4) и отбрасывая нелинейные члены, приходим к следующей линейной системе (черта сверху в дальнейшем опускается)

$$\phi^0 \frac{\partial s_1}{\partial t} + s_1^0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi^0 s_1^0 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \tag{6}$$

$$\phi^0 \frac{\partial s_2}{\partial t} + s_2^0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi^0 s_2^0 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial (1-\phi)}{\partial t} + (1-\phi^0)\frac{\partial u_3}{\partial x} = 0, \tag{8}$$

$$s_1^0\phi^0(u_1 - u_3) = -(K_0(\phi^0)\frac{\overline{k_{01}}}{\mu_1} + K_0(\phi^0)\overline{k_{01}'}(s_1^0)s_1^0)\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{9}$$

$$s_2^0\phi^0(u_2 - u_3) = -(K_0(\phi^0)\frac{\overline{k_{02}}}{\mu_2} + K_0(\phi^0)\overline{k_{02}'}(s_2^0)s_2^0)\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = -a_1(\phi^0)(h(t) - p_{tot}^0 - p) - a_1'(\phi^0)\phi p_{tot}^0 + a_2(\phi^0)\frac{\partial(h(t) - p_{tot}^0 - p)}{\partial t}, \tag{11}$$

$$p_{tot} = h(t), \quad p_e = h(t) - p_{tot}^0 - p, \quad p_s = \frac{h(t) - \phi p_{tot}^0 + \phi^0 p}{1 - \phi - \phi^0}. \tag{12}$$

Преобразуем систему (6)-(12). Складывая уравнения (6)-(8), получим

$$\frac{\partial}{\partial x}((1 - \phi^0)u_3 + \phi^0(u_1 + u_2)) = 0.$$

Откуда

$$u_3 = \frac{\check{c}(t)}{1 - \phi^0} - \frac{\phi^0}{1 - \phi^0}(s_1^0 u_1 + s_2^0 u_2), \tag{13}$$

где $\check{c}(t)$ - некоторая функция времени. Положим

$$A_1 = -K_0(\phi^0)\frac{\overline{k_{01}}(s_1^0)}{\mu_1} - K_0(\phi^0)\frac{\overline{k_{01}'}(s_1^0)}{\phi^0}, \quad A_2 = -K_0(\phi^0)\frac{\overline{k_{02}}(s_2^0)}{\mu_2} - K_0(\phi^0)\frac{\overline{k_{02}'}(s_2^0)}{\phi^0}.$$

С учетом (12) уравнения (9), (10) можно представить в виде

$$u_1(1 + \phi^0 + \phi^0 s_1^0) - u_2 s_2 \phi^0 = (1 + \phi^0)A_1\frac{\partial p}{\partial x} - \check{c},$$

$$u_1 s_1^0 \phi^0 - u_2(1 + \phi^0 + \phi^0 s_2^0) = (1 + \phi^0)A_2\frac{\partial p}{\partial x} - \check{c}.$$

Поскольку определитель этой системы всегда не равен нулю, то получим

$$u_1 = B_1\frac{\partial p}{\partial x} - \check{c}_1, \quad u_2 = B_2\frac{\partial p}{\partial x} - \check{c}_2, \tag{14}$$

где

$$B_1 = (1 + \phi^0)A_1 - \frac{\phi^0 s_2^0}{1 + \phi^0 + \phi^0 s_1^0}\frac{1 + \phi^0}{1 + \phi^0 + (\phi^0)^2 s_1^0 + (\phi^0)^2 s_1^0 s_2^0}A_2,$$

$$B_2 = -A_2\frac{1 + \phi^0}{1 + \phi^0 + (\phi^0)^2 s_1^0 + \phi^{02} s_1^0 s_2^0},$$

$$B_3 = \frac{-\phi^0}{1 - \phi^0}(s_1 B_1 + s_2 B_2),$$

$$\check{c}_1 = \frac{\check{c}}{1 + \phi^0 + (\phi^0)^2 s_1^0 + (\phi^0)^2 s_1^0 s_2^0} - \check{c},$$

$$\check{c}_2 = \frac{\check{c}}{1 + \phi^0 + (\phi^0)^2 s_1^0 + \phi^{02} s_1^0 s_2^0},$$

$$\check{c}_3 = \frac{\check{c}}{1 - \phi^0} + \frac{\phi^0}{1 - \phi^0}(s_1^0 \check{c}_1 + s_2^0 \check{c}_2).$$

Получим уравнения для ϕ, p, s. Складывая уравнения (6) и (7), выводим

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi^0\frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial x} = 0.$$

С учетом (13), имеем

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = C_1\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \tag{15}$$

где $C_1 = -\phi^0(s_1^0 B_1 + s_2^0 B_2)$. Будем считать $h(t)$ константой. Из (10) и (13) выводим

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\frac{a_1(\phi^0)}{B_3}(p_{tot}^0 - p) - \frac{a_1'(\phi^0)}{B_3}\phi p_{tot}^0 - \frac{a_2(\phi^0)}{B_3}\frac{\partial p}{\partial t},$$

где

$$D_1 = -\frac{a_1(\phi^0)p_{tot}^0}{B_3} - \frac{a_1'(\phi^0)\phi p_{tot}^0}{B_3}, \quad \alpha = -\frac{a_1(\phi^0)}{B_3}, \quad \beta = -\frac{a_2(\phi^0)}{B_3}.$$

Дифференцируя уравнение (14) по t и используя (13) приходим к уравнению для p

$$\frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2} = \alpha \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \tag{16}$$

Будем искать решение в виде $p = \Psi(t)\Theta(x)$. Перепишем уравнение (16)

$$\Theta''(x)(\alpha\Psi'(t) + \beta\Psi(t)) = \Psi''(t)\Theta(x).$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{\Theta''(x)}{\Theta(x)} = \frac{\Psi''(t)}{\alpha\Psi'(t) + \beta\Psi(t)} = -\lambda.$$

Отсюда,

$$\Theta = c_1 cos(\lambda x) + c_2 sin(\lambda x), \quad \Psi = c_3 e^{k_1 t} + c_4 e^{k_2 t},$$

где

$$k_1 = \frac{\lambda\alpha - \sqrt{\lambda^2\alpha^2 + 4\lambda\beta}}{2}, \quad k_2 = \frac{\lambda\alpha + \sqrt{\lambda^2\alpha^2 + 4\lambda\beta}}{2}.$$

Тогда решение для p имеет вид

$$p = (c_1 cos(\lambda x) + c_2 sin(\lambda x))(c_3 e^{k_1 t} + c_4 e^{k_2 t}). \tag{17}$$

Из уравнения (15) находим ϕ

$$\phi = C_1 \lambda^2 (\frac{c_3}{k_1} e^{k_1 t} + \frac{c_4}{k_2} e^{k_2 t})(-c_1 cos(\lambda x) - c_2 sin(\lambda x)).$$

Уравнение для s_1 получим из (7)

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} = -(\frac{s_1^0}{\phi^0} + s_1^0 B_1)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \check{c}_1''(x).$$

Отсюда имеем решение для s_1

$$s_1 = -(\frac{s_1^0}{\phi^0} + s_1^0 B_1)\lambda^2(\frac{c_3}{k_1} e^{k_1 t} + \frac{c_4}{k_2} e^{k_2 t})(-c_1 cos(\lambda x) - c_2 sin(\lambda x)) - \check{c}_1''(x).$$

Представление (17) является ключевым при исследовании решений системы (1)-(5). Условие $Re\ k_i < 0, i = 1, 2$ является необходимым для сходимости к стационарному решению.

4. Заключение

Для нелинейной системы уравнений движения двух жидкостей в пороупругости среде построено точное решение стационарной задачи. Исследовано поведение решений линеаризованной системы.

Список литературы

1. Папин А.А., Подладчиков Ю.Ю. Изотермическое движение двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде // Известия Алтайского государственного университета. — 2015. — № 1-2(85). — С. 131–140.

2. Ведерников В.В., Николаевский В.Н. Уравнения механики пористых сред, насыщенных двухфазной жидкостью // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1978. — Т. 5. — С. 165–169.

3. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. — Новосибирск : Наука, 1983.

4. Антонцев С.Н., Папин А.А. Приближенные методы решения задач двухфазной фильтрации // Доклады Академии наук СССР. — 1979. — Т. 247, № 3. — С. 521–525.

5. Папин А.А. Существование решения "в целом"уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси. II. Результаты о разрешимости // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2006. — Т. 9, № 3(27). — С. 111–123.

6. Папин А.А. Существование решения "в целом"уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси. I. Постановка задачи и вспомогательные утверждения // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2006. — Т. 9, № 2(26). — С. 116–136.

7. Papin A.A., Tokareva M.A. On local solvability of the system of the equations of one dimensional motion of magma // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. — 2017. — Т. 10, № 3. — С. 385–395.

8. Папин А.А., Сибин А.Н. Автомодельное решение задачи поршневого вытеснения жидкостей в пороупругой среде // Известия Алтайского государственного университета. — 2016. — № 1(89). — С. 152–156.

9. Sibin A. Numerical study of a mathematical model of internal erosion of soil // Journal of Physics: Conference Series. — 2017. — Vol. 894, no. 1. — P. 012085.

10. Папин А.А., Сибин А.Н. Моделирование движения смеси твердых частиц и жидкости в пористых средах с учетом внутренней суффозии // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2019. — № 4. — С. 82–94.