УДК 517.95 + 519.63

Движение вязкого газа в пороупругой среде под большим давлением

Шаульский Д.В.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
danilx.2012@yandex.ru

Аннотация

В данной работе представлена постановка одномерной задачи фильтрации газа в пористой среде. Дан вывод линейного и нелинейного уравнений второго порядка для пористости в переменных Лагранжа. Составлена разностная схема и проведено численное исследование.

Ключевые слова: пористость, фильтрация, вязкость, пороупругость, закон Дарси.

1. Общие сведения

Следующие сведения изложены в [1].

Скорость Дарси. Скорость Дарси (удельный расход на единицу площади поверхности) определяется следующей формулой

$$\vec{q}_D = \phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s),$$

где ϕ – пористость (доля объема среды, приходящаяся на пустоты), $\vec{v}_f, \vec{v}_s$ – скорости жидкости и породы соответственно.

Закон сохранения массы. Закон сохранения масс для жидкости и твердой фазы в отсутствие фазовых переходов выглядит следующим образом

$$\frac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} + \bigtriangledown \cdot (\rho_f \phi \vec{v}_f) = 0,$$

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \bigtriangledown \cdot ((1-\phi)\rho_s \vec{v}_s) = 0, \tag{1}$$

где t – время, ρ_f – плотность жидкости, ρ_s – плотность породы, $\bigtriangledown = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$ - оператор градиента, (x_1, x_2, x_3) – переменные Эйлера.

Закон сохранения массы можно записать в терминах материальной производной ($\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{v_s} \cdot \bigtriangledown A$). Откуда для несжимаемой жидкости получим

$$\frac{d\phi}{dt} = - \bigtriangledown \cdot \vec{q}_D - \phi \bigtriangledown \cdot \vec{v}_s. \tag{2}$$

Для несжимаемой породы ($\rho_s = const$) уравнение (1) можно представить в виде

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = -(1-\phi)(\bigtriangledown \cdot \vec{v}_s) - \vec{v}_s \cdot \bigtriangledown((1-\phi)),$$

и, следовательно,

$$\bigtriangledown \cdot \vec{v}_s = \frac{1}{1-\phi}\frac{d\phi}{dt}. \tag{3}$$

Используя (2) и (3), выводим

$$- \bigtriangledown \cdot \vec{q}_D = \frac{1}{1-\phi}\frac{d\phi}{dt}.$$

Напряжение и эффективное напряжение. При движении жидкости в горной породе постулируется:

1) общий тензор напряжения σ определяется через тензор напряжения твердой фазы σ_s и жидкой σ_f по правилу:

$$\sigma = (1-\phi)\sigma_s + \phi\sigma_f = (1-\phi)(S_s - p_s I) - \phi p_f I,$$

а полное (общее) давление есть $p_{tot} = (1-\phi)p_s + \phi p_f$, где σ_s, S_s, p_s – тензор напряжения, девиатор тензора напряжения, давление твердой фазы, соответственно, и σ_f, p_f – тензор напряжение и давление жидкой фазы;

2) девиатор тензора напряжения в жидкой фазе отсутствует ($S_f = 0$), потому что вязкость жидкости много меньше, чем каркасная сдвиговая вязкость.

В соответствии с принципом Терцаги деформация двухфазной среды определяется через эффективное напряжение $\sigma_e = \sigma + p_f I$. Тогда в случае полного насыщения среды динамическое эффективное давление $p_e = p_{tot} - p_f$.

Реологическое соотношение для вязкоупругой среды. Для каждой составляющей двухфазной среды (скелета s породы и содержащейся в ней жидкости f) вводятся понятия объемов твердого скелета V_s и пор V_p. Тогда удельный объем пор (пористость) $\phi = \frac{V_p}{V_t}$, где V_p, V_t – объем пор и общий объем. Общий объем – это объем пор и породы $V_t = V_p + V_s$. Заметим, что

$$d\phi = \frac{dV_p}{V_t} - V_p\frac{dV_t}{V_t^2} = \frac{dV_p}{V_t} - \phi\frac{dV_t}{V_t} \tag{4}$$

Если плотность ρ_s твердой фазы постоянна, то $dV_s = 0$ и $dV_t = dV_p$. Из уравнения (4) получим

$$d\phi = (1-\phi)\frac{dV_t}{V_t}. \tag{5}$$

Объемная сжимаемость двухфазной среды β_t определяется, как относительное суммарное изменение объема, реагирующее на изменение приложенного эффективного динамического давления p_e: $\beta_t = -\frac{1}{V_t}(\frac{\partial V_t}{\partial p_e})$. Уравнение (5) примет вид

$$d\phi = -(1-\phi)\beta_t dp_e.$$

Объемная сжимаемость также является функцией пористости: $\beta_t = \phi\beta_\phi$, где β_ϕ – коэффициент сжимаемости, определенный как:

$$\beta_\phi = -1/V_p(\partial V_p/\partial p_e) = -1/\phi(\partial\phi/\partial p_e).$$

Тогда изменение пористости для механического сжатия может быть записано следующим образом:

$$\bigtriangledown \cdot \vec{v}_s = -\phi\beta_\phi\frac{dp_e}{dt}.$$

При этом закон деформации может быть записан в виде

$$\bigtriangledown \cdot \vec{v}_s = -\frac{p_e}{\xi},$$

где ξ – объемная вязкость.

Объемная вязкость зависит от ϕ: $\xi = \frac{\eta}{\phi}$, где η – сдвиговая вязкость горной породы (твердой матрицы).

Таким образом постулируется реологический закон, объединяющий механическую и вязкую сжимаемость

$$\bigtriangledown \cdot \vec{v}_s = -\beta_t(\phi)\frac{dp_e}{dt} - \frac{p_e}{\xi(\phi)},$$

где $\beta_f(\phi), \xi(\phi)$ – объемная сжимаемость и объемная вязкость.

Закон Дарси. Уравнение сохранения импульса для жидкости берется в форме закона Дарси

$$\vec{q}_D = -K \bigtriangledown (\frac{P_{ex}}{\rho_f g}),$$

где K – гидравлическая проводимость (тензор фильтрации), $K = (k'\rho_f g)/\mu, k', \mu$ – проницаемость и динамическая вязкость жидкости, P_{ex} – избыточное давление жидкости, определяемое как разность между давлением жидкости и гидростатическим давлением:$P_{ex} = p_f - p_h$. Отсюда следует, что

$$\vec{q}_D = -\frac{k'}{\mu}(\bigtriangledown p_f + \rho_f \vec{g}).$$

В некоторых случаях коэффициенты k', β_t, ξ могут быть опытным путем определены несколько иначе. В рассматриваемой нами модели они имеют вид: $\beta_t = \phi^b \beta_\phi, \xi = \eta/\phi^m, k' = k\phi^n$, где $b = 1/2, m \in [0, 2], n = 3$.

Уравнение сохранения импульса системы "твердая матрица - поровая жидкость а именно: уравнение несжимаемой деформации твердого скелета с учетом влияния порового давления жидкости имеет вид

$$\nabla \cdot \sigma + \rho_{tot} \vec{g} = 0,$$

где $\rho_{tot} = (1-\phi)\rho_s + \phi\rho_f$ - средняя плотность среды.

Таким образом уравнения модели при отсутствии фазовых переходов имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_f) + div(\phi\rho_f\vec{v}_f) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}((1-\phi)\rho_s) + div((1-\phi)\rho_s\vec{v}_s) = 0, \tag{7}$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -\frac{K(\phi)}{\mu}(\nabla p_f + \rho_f\vec{g}), \tag{8}$$

$$div\ \vec{v}_s = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{v}_s \cdot \nabla p_e), \tag{9}$$

$$\rho_{tot}\ \vec{g} + div(\eta(1-\phi)(\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial x} + \frac{\partial \vec{v}_s^{\,*}}{\partial x})) - \nabla p_{tot} = 0, \tag{10}$$

Данная квазилинейная система составного типа описывает одномерное нестационарное движение жидкости в деформируемой пористой среде [13]. Она состоит из уравнений сохранения массы для твёрдой и жидкой фаз, закона Дарси, реологического соотношения и закона сохранения баланса сил. Здесь $p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s$ – общее давление, g – плотность массовых сил, $a_1(\phi)$ – коэффициент объемной вязкости, $a_2(\phi)$ – коэффициент объемной сжимаемости, η – динамическая вязкость твердой среды, $K(\phi)$ – проницаемость, μ – динамическая вязкость жидкости. В дальнейшем используется обозначение $k_0(\phi) = \frac{K(\phi)}{\mu}$ – коэффициент фильтрации. Задача записана в эйлеровых координатах $(x, t) \in Q_T$.

Вопросы разрешимости начально-краевых задач для системы (6)-(10) исследовались в работах [2–6]. близкие по структуре системы рассматривались в [7, 8].

2. Постановка одномерной задачи фильтрация газа в пористой среде

В данной главе изучается квазилинейная система уравнений [2, 9–11]:

$$\frac{\partial \phi \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial \phi \rho_f v_f}{\partial x} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial (1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \frac{\partial (1-\phi)\rho_s v_s}{\partial x} = 0, \tag{12}$$

$$\phi(v_f - v_s) = -k_0(\phi)(\frac{\partial p_f}{\partial x} + \rho_f g), \tag{13}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial x} = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t} + v_s \frac{\partial p_e}{\partial x}), \tag{14}$$

$$\rho_{tot}\, g + \frac{\partial}{\partial x}(2\eta(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x} - p_{tot}) = 0, \tag{15}$$

решаемая в области $(x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega = (0,1)$, при краевых и начальных условиях

$$v_s\mid_{x=0,x=1} = v_f\mid_{x=0,x=1} = 0, \quad \phi\mid_{t=0} = \phi^0(x).$$

В дальнейшем предполагается, что $(\rho_f, \rho_s) = const$, $g = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = \beta\phi$, $\beta = const > 0$, $\eta = 0$. Тогда система (11)-(15) примет следующий вид:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi v_f}{\partial x} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial (1-\phi)}{\partial t} + \frac{\partial (1-\phi) v_s}{\partial x} = 0, \tag{17}$$

$$\phi(v_f - v_s) = -k_0(\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial x} = -\beta\phi(\frac{\partial p_e}{\partial t} + v_s \frac{\partial p_e}{\partial x}), \tag{19}$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = 0. \tag{20}$$

3. Переход к переменным Лагранжа

Перейдем в системе (16)-(20) к переменным Лагранжа [2, 10, 12]. Пусть $\bar{x} = \bar{x}(\tau, x, t)$ - решение задачи Коши

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau} = v_s(\bar{x}, \tau), \quad \bar{x}\mid_{\tau=t} = x.$$

Положим $\hat{x} = \bar{x}(\tau, x, t)\mid_{\tau=0}$ и возьмем за новые переменные $\hat{x}$ и t. Якобиан перехода $J = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}$ находится по формуле

$$J = exp\left(-\int_0^t \frac{\partial v_s}{\partial \bar{x}}(\bar{x}(\tau, x, t), \tau)d\tau\right).$$

С другой стороны, уравнение сохранения массы для твердой фазы

$$\frac{\partial (1-\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((1-\phi)v_s) = 0,$$

можно вдоль траектории $\bar{x}(\tau)$ записать в виде

$$\frac{d}{d\tau}\ln(1-\phi) = -\frac{\partial v_s}{\partial \bar{x}}(\bar{x}(\tau,x,t),\tau),$$

далее, проинтегрировав обе части равенства от 0 до t получим

$$\ln\left(\frac{1-\phi(\hat{x},t)}{1-\phi^0(\hat{x})}\right) = -\int_0^t \frac{\partial v_s}{\partial \bar{x}}(\bar{x}(\tau,x,t),\tau)d\tau.$$

Следовательно,

$$\frac{1-\phi(\hat{x},t)}{1-\phi^0(\hat{x})} = exp\left(-\int_0^t \frac{\partial v_s}{\partial \bar{x}}(\bar{x}(\tau,x,t),\tau)d\tau\right) = J(\hat{x},t).$$

Поэтому система (2.6)-(2.10) в новых переменных принимает форму

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + \frac{(1-\hat{\phi})}{1-\phi^0}\frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{\phi}\hat{v}_f) = v_s\frac{(1-\hat{\phi})}{1-\phi^0}\frac{\partial}{\partial \hat{x}}\hat{\phi},$$

$$\frac{\partial(1-\hat{\phi})}{\partial t} + \frac{(1-\hat{\phi})^2}{1-\phi^0}\frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{x}} = 0,$$

$$\hat{\phi}(\hat{v}_s - \hat{v}_f) = k(\phi)\frac{1-\hat{\phi}}{1-\phi^0}\frac{\partial \hat{p}_f}{\partial \hat{x}},$$

$$\frac{(1-\hat{\phi})}{1-\phi^0}\frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{x}} = -\beta(\hat{\phi})\frac{\partial \hat{p}_e}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \hat{p}_{tot}}{\partial \hat{x}} = 0.$$

Поскольку

$$\hat{v}_s\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{\phi}\hat{v}_s) - \hat{\phi}\frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{x}},$$

то уравнение неразрывности для жидкой фазы можно привести к виду

$$\frac{1}{1-\hat{\phi}}\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + \frac{1}{1-\phi^0}\frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{\phi}(\hat{v}_f - \hat{v}_s)) + \frac{1}{1-\phi^0}\hat{\phi}\frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{x}} = 0.$$

Используя уравнение неразрывности для твердой фазы, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\hat{\phi}}{1-\hat{\phi}}\right) + \frac{1}{1-\phi^0}\frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{\phi}(\hat{v}_f - \hat{v}_s)) = 0.$$

Переходя от $(\hat{x},t)$ к массовым лагранжевым переменным (y,t) по правилу $(1-\phi^0(\hat{x}))d\hat{x} = dy$, $y(\hat{x}) = \int\limits_0^{\hat{x}}(1-\phi^0(\eta))d\eta \in [0,1]$ и формально заменяя y на ξ, приходим к следующей системе

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi}{1-\phi}) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\phi(v_f - v_s)) = 0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(1-\phi) + (1-\phi)^2\frac{\partial v_s}{\partial \xi} = 0, \tag{22}$$

$$\phi(v_f - v_s) = -k_0(\phi)(1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial \xi}, \tag{23}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial \xi} = -\beta\phi\frac{\partial p_e}{\partial t}, \tag{24}$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = 0. \tag{25}$$

4. Переход к безразмерным переменным

Перейдем в системе (21)-(25) к безразмерным переменным [2, 11]

$$t' = \frac{t}{t_1}, \xi' = \frac{\xi}{\xi_1}, v_f' = \frac{v_f}{V}, v_s' = \frac{v_s}{V}, p_f' = \frac{p_f}{P},$$
$$p_{tot}' = \frac{p_{tot}}{P} = \frac{\phi p_f + (1-\phi)p_s}{P}, k_0'(\phi) = \frac{k_0(\phi)}{K_0}, p_e' = \frac{p_e}{P}, \beta' = \frac{\beta}{\beta_0}.$$

Система уравнений (21)-(25) принимает следующую форму

$$\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\phi}{1-\phi} + V\frac{t_1}{x_1}\frac{\partial}{\partial \xi'}(\phi(v_f' - v_s')) = 0,$$
$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t'} + V\frac{t_1}{x_1}(1-\phi)^2\frac{\partial v_s'}{\partial \xi'} = 0,$$

$$\phi(v_f' - v_s') = -k_0'(\phi)(1-\phi)\frac{K_0 P}{x_1 V}\frac{\partial p_f'}{\partial \xi'},$$

$$(1-\phi)\frac{\partial v_s'}{\partial \xi'} = -\frac{\beta_0 x_1 P}{V t_1}\beta'\phi\frac{\partial p_e'}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial p_{tot}'}{\partial \xi'} = 0.$$

Для получения безразмерной формы положим $V = \frac{x_1}{t_1}, K_0 = \frac{x_1 V}{P}, \beta_0 = \frac{1}{P}$. Тогда система примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\phi}{1-\phi} + \frac{\partial}{\partial \xi'}(\phi(v_f' - v_s')) = 0,$$
$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t'} + (1-\phi)^2\frac{\partial v_s'}{\partial \xi'} = 0,$$

$$\phi(v_f' - v_s') = -k_0'(\phi)(1-\phi)\frac{\partial p_f'}{\partial \xi'},$$

$$(1-\phi)\frac{\partial v_s'}{\partial \xi'} = -\beta'\phi\frac{\partial p_e'}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial p_{tot}'}{\partial \xi'} = 0.$$

Опустим штрихи и перепишем систему в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\phi}{1-\phi} + \frac{\partial}{\partial \xi}(\phi(v_f - v_s)) = 0, \tag{26}$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t}+(1-\phi)^2\frac{\partial v_s}{\partial \xi}=0, \tag{27}$$

$$\phi(v_f-v_s)=-k_0(\phi)(1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial \xi}, \tag{28}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial \xi}=-\beta\phi\frac{\partial p_e}{\partial t}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial \xi}=0. \tag{30}$$

5. Сведение к одному уравнению

Из уравнений (27) и (29) имеем:

$$p_e=c(\xi)-\frac{1}{\beta}\ln(\frac{\phi}{1-\phi}).$$

Тогда

$$p_f=p_{tot}-c(\xi)+\frac{1}{\beta}\ln(\frac{\phi}{1-\phi}). \tag{31}$$

С учетом (26), (28) и (31) получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi}{1-\phi})+\frac{\partial}{\partial \xi}(-k_0(1-\phi)(-\frac{\partial c(\xi)}{\partial \xi}+\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \xi}\ln(\frac{\phi}{1-\phi})))=0.$$

Положим

$$s=\frac{\phi}{1-\phi}.$$

Таким образом, уравнение для s можно представить в виде:

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \xi}(-k_0(s)\frac{1}{(1+s)s}\frac{1}{\beta}\frac{\partial s}{\partial \xi}+k_0(s)\frac{1}{1+s}\frac{\partial c(\xi)}{\partial \xi})=0, \tag{32}$$

где

$$c(\xi)=p_{tot}(t)-p_f(\xi,t)+\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{\phi(\xi,t)}{1-\phi(\xi,t)}\right). \tag{33}$$

Если известно

$$p_{tot}(0)=p^0_{tot}, p_f(\xi,0)=p^0_f, \phi(\xi,0)=\phi^0(\xi),$$

то

$$c(\xi)=p^0_{tot}-p^0_f+\frac{1}{\beta}\ln(\frac{\phi^0(\xi)}{1-\phi^0(\xi)}). \tag{34}$$

Рассмотрим возможные варианты вида c(ξ). Предположим, что c(ξ) = const, тогда (32) примет вид:

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \xi}(-k_0(s)\frac{1}{(1+s)s}\frac{1}{\beta}\frac{\partial s}{\partial \xi})=0. \tag{35}$$

Далее, пусть

$$k_0(s)\frac{1}{(1+s)s}\frac{1}{\beta}=\beta_1=const,$$

то есть

$$k_0(s) = \beta_1\beta(1+s)s.$$

Возникает уравнение для s:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \beta_1 \frac{\partial^2 s}{\partial \xi^2}, \tag{36}$$

с граничными и начальными условиями:

$$s\mid_{\xi=0} = p^0 = const > 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial \xi}\mid_{\xi=1} = 0,$$

$$s\mid_{t=0} = \begin{cases} p^0, & \xi \in [0, l_1], \\ 0, & \xi \in (l_1, 1]. \end{cases}$$

6. Алгоритм численного решения одномерной задачи

Будем решать задачу (36) при помощи метода прогонки с использованием однородной разностной с переменными коэффициентами [13].

Введём сетку с распределенными узлами $x_i = ih$, $t_n = n\tau$; $i = 0, ..., N$, $n = 0, ..., M$, h - шаг по пространственной координате, τ - шаг по времени.

Запишем уравнение с использованием конечно-разностной аппроксимации в виде:

$$\frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} = \beta_1 \frac{s_{i+1}^{n+1} - 2s_i^{n+1} + s_{i-1}^{n+1}}{h^2}. \tag{37}$$

Далее приходим к задаче

$$\tilde{a_i^n} s_{i-1}^{n+1} - \tilde{c_i^n} s_i^{n+1} + \tilde{b_i^n} s_{i+1}^{n+1} = \tilde{f_i^n}, \quad s_0 = \chi_1 s_1 + \mu_1, \quad s_N = \chi_2 s_{N-1} + \mu_2, \tag{38}$$

где $\tilde{a_i^n} = \frac{\beta_1\tau}{h^2}$, $\tilde{b_i^n} = \frac{\beta_1\tau}{h^2}$, $\tilde{c_i^n} = 1 + \frac{2\beta_1\tau}{h^2}$, $\tilde{f_i^n} = s_i^n$.

Будем искать решение уравнения (38) в виде

$$s_i^{n+1} = \alpha_{i+1}^{n+1} s_{i+1}^n + \beta_{i+1}^{n+1}, \quad i = N-1, N-2, ..., 0, \tag{39}$$

где

$$\alpha_{i+1}^{n+1} = \frac{\tilde{b_i^n}}{\tilde{c_i^n} - \alpha_i^{n+1}\tilde{a_i^n}}, \quad \beta_{i+1}^{n+1} = \frac{\tilde{a_i^n}\beta_i^{n+1} - \tilde{f_i^n}}{\tilde{c_i^n} - \alpha_i^{n+1}\tilde{a_i^n}}, \quad i = 1, ..., N-1. \tag{40}$$

Аппроксимация граничных условий примет вид:

$$s_0 = p^0, \quad \frac{s_N - s_{N-1}}{h} = 0. \tag{41}$$

Для начала счета по формуле (39) нужно знать s_N^n, которое определяется из уравнений

$$s_N^n = \chi_2 s_{N-1}^n + \mu_2, \quad s_{N-1}^n = \alpha_N^n s_N^n + \beta_N^n,$$

и равно

$$s_N^n = \frac{\chi_2\beta_N + \mu_2}{1 - \chi_2\alpha_N}. \tag{42}$$

Используя аппроксимацию граничного условия (41), получим

$$\chi_1 = \mu_2 = \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \mu_1 = p^0, \quad \chi_2 = 1.$$

Формулы (39), (40) и (42) описывают метод правой прогонки. Формулы (39) и (42) имеют смысл, так как $|\tilde{c_i}| \geq |\tilde{a_i}| + |\tilde{b_i}|$ и $|\chi_\alpha| \leq 1$, $i = 1, ..., N-1; \alpha = 1, 2.$. Выполнение этих условий гарантирует устойчивость метода прогонки [13, с. 41]. Схема (37) имеет второй порядок аппроксимации.

Найдём численное решение при $p^0 = 1000$, $t = 1$, $\beta_1 = 1$, $l_1 = 0.5$. График изменения s представлен на рис. 1, 2.

Вернёмся к пористости, которая имеет вид $\phi = \frac{s}{1+s}$. Распределение пористости при таком решении представлено на рис. 3, 4, 5.

Рис. 3 показывает изменение пористости при различных переменных. На рис. 4 пред-

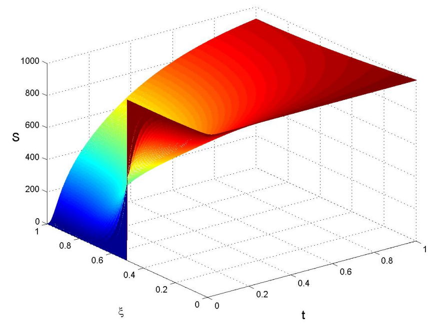

Рисунок 1. Изменение s при $p^0 = 1000$, $\beta_1 = 1$, $l_1 = 0.5$

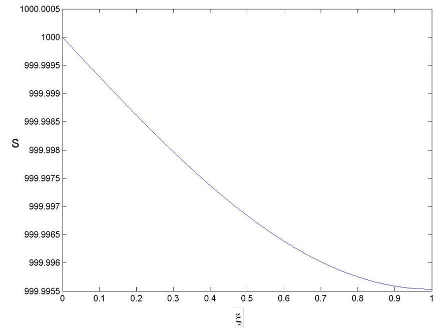

Рисунок 2. Изменение s при $t = 1$.

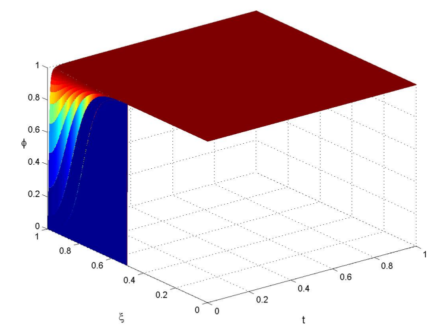

Рисунок 3. Изменение пористости при $p^0 = 1000$, $l_1 = 0.5$, $\beta_1 = 1$

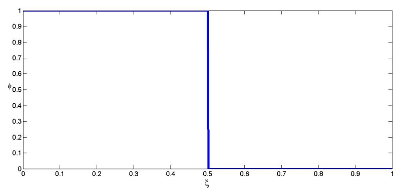

Рисунок 4. Изменение пористости при $t = 0$

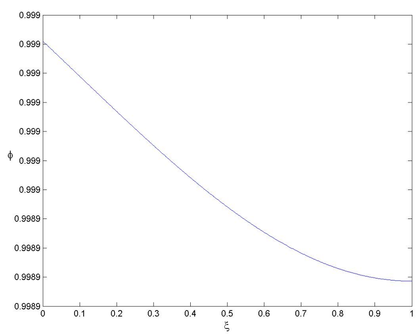

Рисунок 5. Изменение пористости при $t = 1$

ставлен график пористости в начальный момент времени ($t = 0$) и он показывает, что поры были закрыты. Пористость при $t = 1$ показан на рис. 5. Из графике следует, что при течении времени поры будут раскрываться и газ выйдет на поверхность.

7. Нелинейное уравнение

Вернёмся к уравнению (35) в котором сделаем замену $k_0 = \tilde{k}\frac{s^3}{1+s}$ и положим $\beta = 1$. Тогда получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \tilde{k}\frac{\partial}{\partial \xi}(a(s)\frac{\partial s}{\partial \xi}), \tag{43}$$

где $a(s) = (\frac{s}{1+s})^2$.

Граничные условия:

$$s\mid_{\xi=0} = p^0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial \xi}\mid_{\xi=1} = 0,$$

$$s\mid_{t=0} = \begin{cases} p^0, & \xi \in [0, l_1], \\ 0, & \xi \in (l_1, 1]. \end{cases}$$

8. Алгоритм численного решения

Также будем решать задачу (43) при помощи метода прогонки с использованием однородной разностной с переменными коэффициентами [13].

Введём сетку с распределенными узлами $x_i = ih$, $t_n = n\tau$; $i = 0, ..., N$, $n = 0, ..., M$, h - шаг по пространственной координате, τ - шаг по времени.

Запишем уравнение с использованием конечно-разностной аппроксимации в виде:

$$\frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} = \frac{\tilde{k}}{h}[(\frac{a_i^n + a_{i+1}^n}{2})(\frac{s_{i+1}^{n+1} - s_i^{n+1}}{h}) - (\frac{a_{i-1}^n + a_i^n}{2})(\frac{s_i^{n+1} - s_{i-1}^{n+1}}{h})], \tag{44}$$

где $a_i^n = a(s_i^n)$.

Далее приходим к задаче

$$\tilde{a_i^n} s_{i-1}^{n+1} - \tilde{c_i^n} s_i^{n+1} + \tilde{b_i^n} s_{i+1}^{n+1} = \tilde{f_i^n}, \quad s_0 = \chi_1 s_1 + \mu_1, \quad s_N = \chi_2 s_{N-1} + \mu_2, \tag{45}$$

где

$$\tilde{a_i^n} = \frac{\tilde{k}\tau}{2h^2}(a_{i-1}^n + a_i^n), \quad \tilde{b_i^n} = \frac{\tilde{k}\tau}{2h^2}(a_i^n + a_{i+1}^n),$$

$$\tilde{c_i^n} = 1 + \frac{2\tilde{k}\tau}{2h^2}(2a_i^n + a_{i+1}^n + a_{i-1}^n), \quad \tilde{f_i^n} = s_i^n.$$

.

Будем искать решение уравнения (45) в виде

$$s_i^{n+1} = \alpha_{i+1}^{n+1} s_{i+1}^n + \beta_{i+1}^{n+1}, \quad i = N-1, N-2, ..., 0, \tag{46}$$

где

$$\alpha_{i+1}^{n+1} = \frac{\tilde{b_i^n}}{\tilde{c_i^n} - \alpha_i^{n+1}\tilde{a_i^n}}, \quad \beta_{i+1}^{n+1} = \frac{\tilde{a_i^n}\beta_i^{n+1} - \tilde{f_i^n}}{\tilde{c_i^n} - \alpha_i^{n+1}\tilde{a_i^n}}, \quad i = 1, ..., N-1. \tag{47}$$

Аппроксимация граничных условий примет вид:

$$s_0 = p^0, \quad \frac{s_N - s_{N-1}}{h} = 0. \tag{48}$$

Для начала счета по формуле (46) нужно знать s_N^n, которое определяется из уравнений

$$s_N^n = \chi_2 s_{N-1}^n + \mu_2, \quad s_{N-1}^n = \alpha_N^n s_N^n + \beta_N^n,$$

и равно

$$s_N^n = \frac{\chi_2 \beta_N + \mu_2}{1 - \chi_2 \alpha_N}. \tag{49}$$

Используя аппроксимацию граничного условия (48), получим

$$\chi_1 = \mu_2 = \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \mu_1 = p^0, \quad \chi_2 = 1.$$

Найдём численное решение при $p^0 = 1000$, $t = 1$, $\tilde{k} = 1$. График изменения s представлен на рис. 6, 7., а распределение пористости при данном решении представлен на рис. 8, 9, 10.

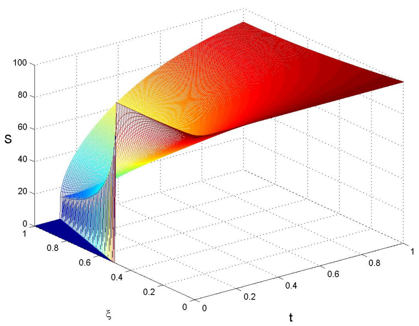

Рисунок 6. Изменение s при $p^0 = 100$, $\tilde{k} = 1$, $l_1 = 0.5$

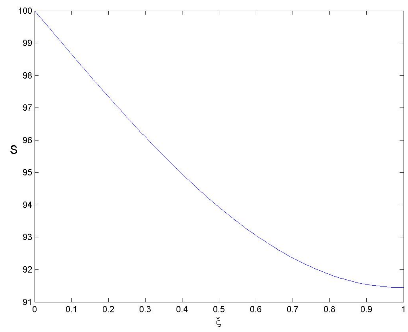

Рисунок 7. Изменение s при $t = 1$

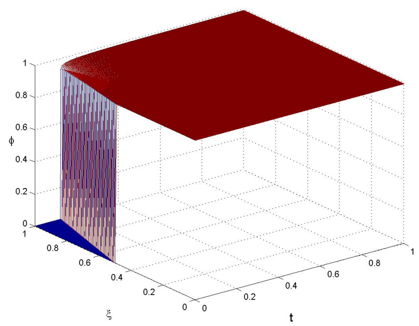

Рисунок 8. Изменение пористости при $p^0 = 100$, $l_1 = 0.5$, $\tilde{k} = 1$

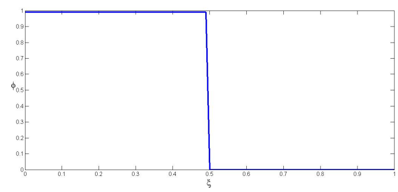

Рисунок 9. Изменение пористости при $t = 0$

Рисунок 8 показывает изменение пористости при различных переменных. На рисунке 9 представлен график пористости в начальный момент времени ($t = 0$) и он показывает, что поры были закрыты. Пористость при $t = 1$ показан на рисунке 10. Из графике следует, что с течением времени поры будут раскрываться и газ выйдет на поверхность.

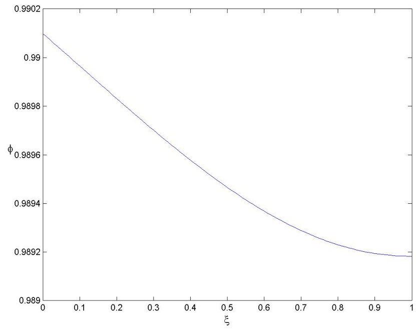

Рисунок 10. Изменение пористости при $t = 1$

Список литературы

1. Ахмерова И.Г., Папин А.А., Токарева М.А. Математические модели механики неоднородных сред. Учебное пособие. — Барнаул, 2012.

2. Токарева М.А. Корректность начально-краевых задач для уравнений фильтрации в пороупругих средах : Дисс... канд. физ.-мат. наук / Токарева М.А. — Барнаул, 2018.

3. Papin A.A., Tokareva M.A. On Local solvability of the system of the equation of one dimensional motion of magma // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2017. — Vol. 10, no. 3. — P. 385–395.

4. Papin A.A., Tokareva M.A. Correctness of the initial-boundary problem of the compressible fluid filtration in a viscous porous medium // IOP Conf.Series: Journal of Physics: Conf. Series. — 2017. — Vol. 894.

5. Tokareva M.A. Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic media // Journal of Physics: Conference Series. — 2016. — Vol. 722.

6. Tokareva M.A. Localization of solutions of the equations of filtration in poroelastic media // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2015. — Vol. 8, no. 4. — P. 467–477.

7. Папин А.А. Существование решения "в целом"уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси. I. Постановка задачи и вспомогательные утверждения // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2006. — Т. 9, № 2(26). — С. 116–136.

8. Папин А.А. Существование решения "в целом"уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси. II. Результаты о разрешимости // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2006. — Т. 9, № 3(27). — С. 111–123.

9. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. Acta. — 1998. — Vol. 11. — P. 55–84.

10. Вирц Р.А., Папин А.А., Вайгант В.А. Численное решение одномерной задачи фильтрации несжимаемой жидкости в вязкой пористой среде // Известия Алтайского государственного университета. — 2018. — № 4(102).

11. Токарева М.А., Вирц Р.А. Автомодельная задача фильтрации в пороупругой среде // Материалы международной школы-семинара “Ломоносовские чтения на Алтае”. — Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2015.

12. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. — Новосибирск : Наука, 1983.

13. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М. : Наука, 1977.