УДК 514.17

О геометрических характеристиках трехмерной равномерной регрессионной модели

Пономарев И.В.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
igorpon@mail.ru

Аннотация

В статье исследуется трехмерная линейная регрессия на основе Чебышевской нормы. Изучается геометрическая интерпретация данной регрессионной модели и определяются неравенства на коэффициенты уравнений регрессий.

Ключевые слова: линейная регрессия, коэффициенты регрессии, перманент матрицы, минимальная ширина множества, выпуклая геометрия.

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^m$ – m-мерное арифметическое евклидово пространство. Пусть Ω конечное подмножество точек:

$$\Omega = \{(x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,m}) : i = 1, \ldots, N\},$$

которое можно рассматривать как результат N экспериментов. В приложениях часто возникает вопрос о существовании функциональной зависимости между переменными $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$. Наиболее простая зависимость между координатами точек – линейная. В статистике разработаны мощные методы для анализа множества Ω на линейную зависимость основанные на Евклидовой норме. В данной работе в качестве основы берется Чебышевская норма равномерного отклонения.

Определение 1. *Минимальной шириной множества Ω вдоль переменной x_j, $j = 1, \ldots, m$ назовем число*

$$\alpha_\infty(\Omega, x_j) = 2 \cdot \min_{k_s, s\neq j\, ;b} \left\{ \max_{i=1,\ldots,N} |x_{i,j} - \sum_{s\neq j}^{m} k_s x_{i,s} - b| \right\}. \tag{1}$$

С геометрической точки зрения величина $\alpha_\infty(\Omega, x_j)$ равна минимуму ширины "полосы" ограниченной двумя параллельными гиперплоскостями и содержащей множество Ω, ширина берется вдоль оси x_j в $\mathbb{R}^m$ (т.е. длина пересечения полосы с осью x_j).

Уравнение гиперплоскости на котором достигается (1) назовем уравнением L_∞ регрессии на переменную x_j:

$$x_j = \sum_{s\neq j}^{m} k_s^0 x_s - b^0, \tag{2}$$

или уравнением регрессии на переменную x_j относительно Чебышевской нормы или равномерной регрессионной моделью.

Замечание 1. *Аналогичные определения справедливы в случае произвольного выпуклого подмножества $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Величины $\alpha_\infty(\Omega, x_j)$ тесно связаны с такими понятиями из выпуклой геометрии, как ширина выпуклого множества в данном направлении и широта выпуклого множества [1].*

2. Геометрическая интерпретация трехмерной регрессии

В работах [2, 3] была рассмотрена модель нечеткой линейной регрессии в двумерном случае. Рассмотрим подробно случай двух независимых переменных, то есть исходное множество данных

$$\Omega = \{(x_i, y_i, z_i) : i = 1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^3$$

есть конечное подмножество трехмерного пространства. Тогда определены три задачи:

$$\alpha_\infty^z = \min_{k_{zx}, k_{zy}, b_z} \max_{i=1,\dots,n} |k_{zx}x_i + k_{zy}y_i + b_z - z_i|, \quad (3)$$

$$\alpha_\infty^x = \min_{k_{xy}, k_{xz}, b_x} \max_{i=1,\dots,n} |k_{xy}y_i + k_{xz}z_i + b_x - x_i|, \quad (4)$$

$$\alpha_\infty^y = \min_{k_{yx}, k_{yz}, b_y} \max_{i=1,\dots,n} |k_{yx}x_i + k_{yz}z_i + b_y - y_i|, \quad (5)$$

соответствующие L_∞-регрессиям z на (x, y); x на (y, z); y на (x, z).

Теорема 1. *Справедливы неравенства*

$$\left|k_{xz}^0\right| \le \frac{\alpha_\infty^x}{\alpha_\infty^z}, \quad \left|k_{zx}^0\right| \le \frac{\alpha_\infty^z}{\alpha_\infty^x}, \quad \left|k_{xy}^0\right| \le \frac{\alpha_\infty^x}{\alpha_\infty^y}, \quad (6)$$

$$\left|k_{yz}^0\right| \le \frac{\alpha_\infty^y}{\alpha_\infty^z}, \quad \left|k_{yx}^0\right| \le \frac{\alpha_\infty^y}{\alpha_\infty^x}, \quad \left|k_{zy}^0\right| \le \frac{\alpha_\infty^z}{\alpha_\infty^y}, \quad (7)$$

где k_{zx}^0, k_{zy}^0, k_{xz}^0, k_{xy}^0, k_{yx}^0, k_{yz}^0 – угловые коэффициенты соответствующих плоскостей регрессии.

Доказательство. Пусть слой, содержащей множество Ω, минимальный в направлении оси OZ задан системой уравнений:

$$\begin{cases} z = k_{zx}^0 x + k_{zy}^0 y + b_z^0 + \alpha_\infty^z, \\ z = k_{zx}^0 x + k_{zy}^0 y + b_z^0 \end{cases} \quad (8)$$

минимальный в направлении оси OX задан системой уравнений:

$$\begin{cases} x = k_{xy}^0 y + k_{xz}^0 z + b_x^0 + \alpha_\infty^x, \\ x = k_{xy}^0 y + k_{xz}^0 z + b_x^0 \end{cases} \quad (9)$$

минимальный в направлении оси OY задан системой уравнений:

$$\begin{cases} y = k_{yx}^0 x + k_{yz}^0 z + b_y^0 + \alpha_\infty^y, \\ y = k_{yx}^0 x + k_{yz}^0 z + b_y^0 \end{cases} . \quad (10)$$

Отрезки высекаемые на осях OZ, OX, OY данными слоями будут соответственно:

$$\begin{pmatrix} \alpha_\infty^z & \frac{\alpha_\infty^z}{|k_{zx}^0|} & \frac{\alpha_\infty^z}{|k_{zy}^0|} \\ \frac{\alpha_\infty^x}{|k_{xz}^0|} & \alpha_\infty^x & \frac{\alpha_\infty^x}{|k_{xy}^0|} \\ \frac{\alpha_\infty^y}{|k_{yz}^0|} & \frac{\alpha_\infty^y}{|k_{yx}^0|} & \alpha_\infty^y \end{pmatrix} \quad (11)$$

В силу минимальности слоя (8) в направлении оси OZ имеем:

$$\alpha_\infty^z \le \frac{\alpha_\infty^x}{|k_{xz}^0|},$$

$$\alpha_\infty^z \le \frac{\alpha_\infty^y}{|k_{yz}^0|}.$$

В силу минимальности слоя (9) в направлении оси OX имеем:

$$\alpha_\infty^x \le \frac{\alpha_\infty^z}{|k_{zx}^0|},$$
$$\alpha_\infty^x \le \frac{\alpha_\infty^y}{|k_{yx}^0|}.$$

В силу минимальности слоя (10) в направлении оси OY имеем:

$$\alpha_\infty^y \le \frac{\alpha_\infty^z}{|k_{zy}^0|},$$
$$\alpha_\infty^y \le \frac{\alpha_\infty^x}{|k_{xy}^0|}.$$

Из полученных неравенств следует утверждение теоремы. $\square$

Теорема 2. *Справедливо равенство:*

$$V = \frac{\alpha_\infty^x \alpha_\infty^y \alpha_\infty^z}{1 - k_{xy}k_{yx} - k_{xy}k_{yz}k_{zx} - k_{xz}k_{yx}k_{zy} - k_{xz}k_{zx} - k_{yz}k_{zy}}, \tag{12}$$

где V – объем параллелепипеда полученного пересечением минимальных слоев.

Доказательство. Перенесем параллельно параллелепипед, содержащий множество Ω, в начало координат. Получаем, что ребро искомого параллелепипеда параллельное плоскостям (9) и (10)

$$m_{12} = \frac{\alpha_\infty^z}{\gamma}\left((k_{\rm xz} + k_{\rm xy}k_{\rm yz}),\ (k_{\rm xz}k_{\rm yx} + k_{\rm yz}),\ -(k_{\rm xy}k_{\rm yx} - 1) \right),$$

ребро параллелепипеда параллельное плоскостям (8) и (10)

$$m_{13} = \frac{\alpha_\infty^x}{\gamma}\left(-(k_{\rm yz}k_{\rm zy} - 1),\ (k_{\rm yx} + k_{\rm yz}k_{\rm zx}),\ (k_{\rm zx} + k_{\rm yx}k_{\rm zy}) \right),$$

ребро параллелепипеда параллельное плоскостям (8) и (9)

$$m_{14} = \frac{\alpha_\infty^y}{\gamma}\left((k_{\rm xy} + k_{\rm xz}k_{\rm zy}),\ -(k_{\rm xz}k_{\rm zx} - 1),\ (k_{\rm xy}k_{\rm zx} + k_{\rm zy}) \right),$$

где $\gamma = 1 - k_{\rm xy}k_{\rm yx} - k_{\rm xy}k_{\rm yz}k_{\rm zx} - k_{\rm xz}k_{\rm yx}k_{\rm zy} - k_{\rm xz}k_{\rm zx} - k_{\rm yz}k_{\rm zy}$. Вычисляя объем параллелепипеда натянутого на векторы m_{12}, m_{13}, m_{14} получим искомое утверждение. $\square$

Замечание 2. *Перманентом квадратной $n \times n$ матрицы $A = ||a_{ij}||$ называют сумму*

$$Per(A) = \sum_{\pi} a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \dots a_{n\pi_n}$$

по всем перестановкам $\pi \in S_n$. Нетрудно проверить, что

$$\gamma = 2 - Per\begin{pmatrix} 1 & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & 1 & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & 1 \end{pmatrix}$$

Следствие 1. *Справедливо неравенство:*

$$V \ge \frac{\alpha_\infty^x \alpha_\infty^y \alpha_\infty^z}{6}.$$

Доказательство. Каждое слагаемое в $\gamma = 1 - k_{\mathrm{xy}}k_{\mathrm{yx}} - k_{\mathrm{xy}}k_{\mathrm{yz}}k_{\mathrm{zx}} - k_{\mathrm{xz}}k_{\mathrm{yx}}k_{\mathrm{zy}} - k_{\mathrm{xz}}k_{\mathrm{zx}} - k_{\mathrm{yz}}k_{\mathrm{zy}}$ в силу теоремы 1 оценивается по модулю сверху единицей. □

3. Заключение

В дальнейшем предполагается использовать данные результаты для создания процедур определения выбросов. Эти процедуры будут использовать геометрическую структуру равномерной регрессионной модели [4–6].

Список литературы

1. Сантало Луи А. Интегральная геометрия и геометрические вероятности : пер. с англ. / Под ред. Р.В. Амбарцумяна. — М. : Наука, 1983.

2. Пономарев И.В., Славский В.В. Нечеткая модель линейной регрессии // Доклады Академии наук. — 2009. — Т. 428, № 5. — С. 598–600.

3. Ponomarev I.V., Slavsky V.V. Uniformly fuzzy model of linear regression // Journal of Mathematical Sciences. — 2012. — Vol. 186, no. 3. — P. 478–494.

4. Пономарев И.В., Саженкова Т.В., Славский В.В. Метод поиска экстремальных наблюдений в задаче нечеткой регрессии // Известия Алтайского государственного университета. — 2018. — № 4(102). — С. 98–101.

5. Пономарев И.В. Действие группы преобразований на показатель качества регрессионной модели // Известия Алтайского государственного университета. — 2019. — № 4(108). — С. 100–103.

6. Пономарев И.В. Метод нахождения выбросов в регрессионной модели L_1 // МАК: Математики – Алтайскому краю сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием. / Главный редактор профессор Н.М. Оскорбин. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2019. — С. 167–169.