УДК 519.876.3

О численном исследовании вероятностных характеристик сетевого планирования

Гнедко М.Е., Саженкова Т.В.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
gnedko98@mail.ru, t.sazhenkova@gmail.com

Аннотация

В работе на данных модельной задачи рассматривается процесс оптимизации стоимости выполнения проекта при заданном (директивном) сроке его выполнения, то есть рассматриваются вопросы оптимального согласования стоимости реализации проекта и интенсивности его реализации. При этом речь идёт об использовании трудовых ресурсов различного уровня квалификации и различного уровня технической оснащённости, что выражается в различной стоимости, как оплаты труда, так и стоимости прочей оснащённости проекта. На основе модельной задачи разработан программный продукт на языке программирования C++ для численных расчётов временных характеристик комплексов работ.

Ключевые слова: сетевой граф, путь, события, работы, критический путь, критические работы, трехпараметрическая модель, двухпараметрическая модель.

1. Введение

Диапазон применения сетевого планирования и управления (СПУ) весьма широк. Он представляет собой систему методов, с помощью которых осуществляется планирование и управление научной и технологической подготовкой производства, строительством новых объектов и реконструкцией старых, организацией и проведением крупных общественных мероприятий и т.д.

Математической основой методов СПУ является отражение производственного процесса (т. е. последовательности выполняемых работ) в виде сетевого графа, который представляет собой специфический частный вид взвешенного графа (каждому ребру поставлено в соответствие некоторое значение), а также определенная совокупность расчетных методов [1].

В данном исследовании рассматриваются три характеристики экономического процесса $t_{\text{опт}}$, $t_{\text{пес}}$ и $t_{\text{вер}}$:

1. $t_{\text{опт}}$ – оптимистическая оценка - минимальный срок, в течение которого выполняется работа в наиболее благоприятных условиях;

2. $t_{\text{пес}}$ – пессимистическая оценка - максимальный срок, необходимый для выполнения работы при наиболее неблагоприятных условиях;

3. $t_{\text{вер}}$ – наиболее вероятная продолжительность времени, показывающая время выполнения работы в нормальных среднестатистических условиях.

В задачах СПУ используется одна, две или все три характеристики одновременно.

Исследование, проведённое в данной работе, базируется на методиках, представленных в литературе [1, 2], и проводится на модельной задаче, описанной далее. Исходными данными в ней служат списки работ с указанием их взаимной последовательности, продолжительности выполнения каждой работы и стоимости дня реализации проекта при наименее возможной интенсивности. Компактная запись части данных модельной задачи имеет вид: $b_1(10) \to b_3(5), b_5(6)$; $b_2(7) \to b_4(2), b_7(9)$; $b_3(5), b_4(2) \to b_6(6), b_8(3)$; $b_7(9), b_8(3) \to b_9(4), b_{12}(8)$; $b_3(5), b_4(2), b_5(6) \to b_{10}(11)$; $b_5(6), b_6(6), b_9(4) \to b_{11}(9)$. Здесь b_i – обозначения работ, в скобках указана их продолжительность, стрелками – порядок их следования. Кроме того в данных указаны: директивный срок выполнения проекта – 22 дня, заданная надежность $\gamma = 0,9$.

2. Предварительная подготовка к использованию программы

Для использования программного продукта необходимо создать сетевой граф задачи. Затем для расчётов в программу вводится нужная исходная информация в соответствии с составленным сетевым графом согласно следующим правилами: если работа существует, то вводится её значение, если работа не существует или она фиктивная (имеет смысловую нагрузку, но на результаты не влияет), то вводится 0 и -1, соответственно.

В соответствии с этими требованиями по данным модельной задачи составлен сетевой граф, представленный на рисунке 1.

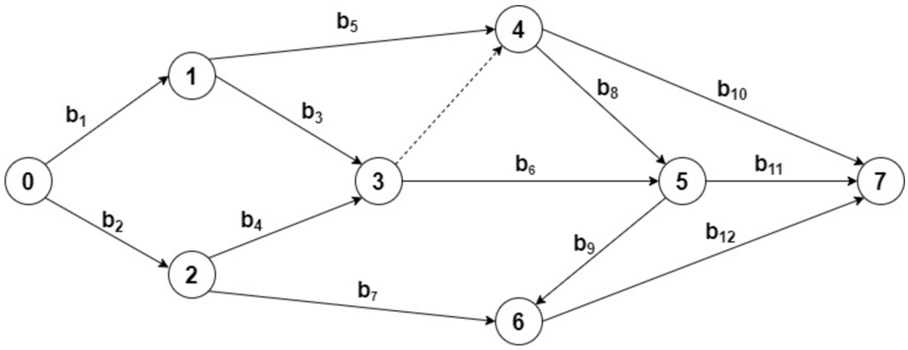

Рисунок 1. Сетевой граф

3. Применение метода критического пути

Наиболее продолжительный полный путь (путь работы которого соединяют начальное и конечное события) в сетевом графе называется критическим. Он имеет особое значение, так как работы этого пути определяют общий цикл завершения всего комплекса планируемых работ [2]. Метод критического пути позволяет определиться с минимальным временем, необходимым для реализации рассматриваемого комплекса работ при заданных временных характеристиках каждой работы. Сетевой граф изначально строится для максимальной продолжительности всех работ $t_{\text{пес}}$. Расчёты методом критического пути осуществляются с использованием следующих формул:

работа – $b_k = (i; j)$; наиболее ранние срок наступления событий –

$$S_p(b_k) = T_p(i) = \max_{i,j} \{T_p(j) + t_{ij}\};$$

наиболее поздние сроки наступления событий –

$$E_n(b_k) = T_n(i) = \min_{i,j} \{T_n(j) - t_{ij}\};$$

резерв времени событий –

$$R(i) = T_n(i) - T_p(i);$$

полный резерв времени работ –

$$r_n(b_k) = E_n(b_k) - S_p(b_k) - t_{ij};$$

независимый резерв времени работ –

$$r_{\text{н}}(b_k) = T_p(j) - T_n(i) - t_{ij}.$$

В соответствии с формулами, приведенными выше, псевдокод программы, осуществляющей метод критического пути, имеет следующую структуру:

1. Создание двумерного массива и ввод в него пессимистической оценки ($t_{\text{пес}}$), двумерных массивов для независимого и полного резервов времени работ. Создаются одномерные массивы для раннего и позднего времени наступления события;

2. Первому элементу массива с ранними сроками наступления события присваивается нулевое значение;

3. Объявляется цикл, в котором высчитываются ранние сроки наступления событий. Создается динамический массив, в него записываются возможное время события. Затем в этом массиве производится поиск максимального значения, и он записывается как ранний срок наступления события. Очищается объявленный динамический массив;

4. Последнему элементу массива с поздними сроками наступления событий присваивается последний элемент массива с ранними сроками наступления событий;

5. Объявляется цикл, в котором высчитываются поздние сроки наступления событий. Создается динамический массив, в него записываются возможное время события. Затем в этом массиве производится поиск минимального значения, и он записывается как поздний срок наступления события. Очищается объявленный динамический массив;

6. В цикле подсчитываются независимые и полные резервы сокращения работ;

7. Вывод полученных результатов.

Результаты расчётов полученных аналитически и с использованием программы совпали и представлены на рисунке 2.

```
Метод критического пути.
Критическое время (в днях): 33
Резервы времени событий:
Событие |  Ранний срок  |  Поздний срок |  Резерв времени
   0    |      0        |       0       |       0
   1    |      10       |       10      |       0
   2    |      7        |       13      |       6
   3    |      15       |       15      |       0
   4    |      16       |       18      |       2
   5    |      21       |       21      |       0
   6    |      25       |       25      |       0
   7    |      33       |       33      |       0
Критческий путь проходит через: 0 -> 1 -> 3 -> 5 -> 6 -> 7
Резервы времени работ:
Работа (Bk) | Продолжительность  работы | Sp(Bk) | Eп(Bk) | rп(Bk) | rн(Bk)
  ( 0, 1 )  |          10              |   0    |   10   |   0    |   0
  ( 0, 2 )  |          7               |   0    |   13   |   6    |   0
  ( 1, 3 )  |          5               |   10   |   15   |   0    |   0
  ( 1, 4 )  |          6               |   10   |   18   |   2    |   0
  ( 2, 3 )  |          2               |   7    |   15   |   6    |   0
  ( 2, 6 )  |          9               |   7    |   25   |   9    |   3
  ( 3, 5 )  |          6               |   15   |   21   |   0    |   0
  ( 4, 5 )  |          3               |   16   |   21   |   2    |   0
  ( 4, 7 )  |          11              |   16   |   33   |   6    |   4
  ( 5, 6 )  |          4               |   21   |   25   |   0    |   0
  ( 5, 7 )  |          9               |   21   |   33   |   3    |   3
  ( 6, 7 )  |          8               |   25   |   33   |   0    |   0
ф = ( 3, 4 )|          0               |   15   |   18   |   3    |   1
```

Рисунок 2. Результаты расчётов методом критического пути

4. Вероятностные характеристики для трехпараметрической и двухпараметрической моделей

При определении временных параметров сетевого графа предполагается, что время выполнения каждой работы известно. Но чаще всего продолжительность работ заранее не известна и может принимать одно из ряда возможных значений. Иначе говоря, продолжительность работы характеризуется своим законом распределения, следовательно, своими числовыми характеристиками – средним значением или математическим ожиданием ($t_{\text{ож}}$, $t^*_{\text{ож}}$) и дисперсией ($\sigma^2(t_{\text{ож}})$) [2].

В случае трехпараметрической модели приводится предположительная продолжительность работы в наиболее благоприятных условиях, в наименее благоприятных условиях и наиболее вероятная продолжительность работы. В случае двухпараметрической модели приводится оптимальная продолжительность работы в наиболее благоприятных условиях и в наименее благоприятных условиях. Расчёты здесь осуществляются с использованием следующих формул:

ожидаемая продолжительность работ в трехпараметрической модели –

$$t_{\text{ож}} = \frac{t_{\text{пес}} + 4t_{\text{вер}} + t_{\text{опт}}}{6};$$

ожидаемая продолжительность работ в двухпараметрической модели –

$$t^*_{\text{ож}} = \frac{3t_{\text{пес}} + 2t_{\text{опт}}}{5};$$

дисперсия продолжительности работ –

$$\sigma^2(t_{\text{ож}}) = \left(\frac{t_{\text{пес}} - t_{\text{опт}}}{6}\right)^2;$$

оценка вероятности выполнения проекта в директивный (заданный) срок –

$$P\left(t_{\text{кр}} \leq T_{\text{дир}}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{T_{\text{дир}} - T_{\text{кр}}}{\sigma_{\text{кр}}}\right);$$

среднеквадратическое отклонение –

$$\sigma_{\text{кр}} = \sqrt{\sigma^2_{\text{кр}}};$$

правило “трех сигм” для нахождения интервала гарантированного времени выполнения проекта –

$$T_{\text{кр}} \pm 3 \cdot \sigma_{\text{кр}};$$

оценка максимального срока выполнения проекта с заданной надежностью –

$$P\left(t_{\text{кр}} \leq T\right) = \frac{1}{2} + \Phi(z_\gamma) = \gamma;$$

доверительный интервал с заданной надежностью –

$$P\left(|t_{\text{кр}} - T| \leq \sigma_{\text{кр}} \cdot z_\gamma\right) = \gamma;$$

функция Лапласа –

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^z e^{-\frac{-t^2}{2}}\, dt.$$

Псевдокод программы для расчётов вероятностных характеристик трехпараметрической и двухпараметрической моделей:

1. Создание двумерных массивов для пессимистической оценки, оптимистической оценки и вероятностной оценки ($t_{\text{пес}}, t_{\text{опт}}, t_{\text{вер}}$), заполнение их информацией. Ввод директивного срока выполнения проекта и заданной надежности;

2. В циклах вычисляется дисперсия каждой работы, также ожидаемое время в случае рассматриваемой модели;

3. Рассматривается метод критического пути по отношению к ожидаемому времени выбранной модели;

4. Вычисляется дисперсия критического пути с помощью цикла и его среднеквадратическое отклонение;

5. Подсчет вероятности выполнения проекта в заданный срок с использованием функции Лапласа, доверительного интервала выполнения проекта и интервала с заданной надежностью;

6. Вывод полученных результатов.

В случае трехпараметрической модели для модельной задачи аналитическим методом установлено, что критическое время выполнения проекта составляет 21 день, дисперсия и среднеквадратическое отклонения равны 2,99 и 1,73, соответственно. Вероятность того, что проект будет выполнен не позднее директивного срока ($T_{\text{дир}} = 22$ дня), составила $P(t_{\text{кр}} \leq 22) = 0,72$ (72%); интервал гарантированного времени выполнения проекта – от 16 до 26 дней; с надежностью $\gamma = 0,9$ проект может быть завершен в период от 18 до 24 дней. Расчёты с применением программного продукта совпадают с этими результатами и представлены на рисунке 3.

```
Трехпараметрическая модель:
Критическое время модели (в днях): 21
Дисперсия критического пути равна: 3.
Среднеквадратическое отклонение равно: 1.73205.
Вероятность, что проект будет выполнен в срок равна: 72%.
Интервал времени выполнения проекта лежит в промежутке от 16 до 26 дней.
С надежностью 0.9 проект будет выполнен в период от 18 до 24 дней.
```

Рисунок 3. Результаты для трехпараметрической модели

В случае двухпараметрической модели аналитические исследования дают следующие результаты: критическое время выполнения проекта составляет 24 дня, дисперсия и среднеквадратическое отклонения равны 2,99 и 1,73, соответственно. Вероятность выполнения проекта не позднее директивного срока ($T_{\text{дир}} = 22$ дня) составляет ($P(t_{\text{кр}} \leq 22) = 0,12$ (12%); интервал гарантированного времени выполнения проекта находится в промежутке от 19 до 29 дней; с надежностью $\gamma = 0,9$ проект может быть завершен в период от 21 до 27 дней. Расчёты с применением программного продукта совпадают с этими результатами.

```
Двухпараметрическая модель:
Критическое время модели (в днях): 24
Дисперсия критического пути равна: 3.
Среднеквадратическое отклонение равно: 1.73205.
Вероятность, что проект будет выполнен в срок равна: 12%.
Интервал времени выполнения проекта лежит в промежутке от 19 до 29 дней.
С надежностью 0.9 проект будет выполнен в период от 21 до 27 дней.
```

Рисунок 4. Результаты для двухпараметрической модели

Программный код расчёта вероятностных характеристик для обеих моделей можно использовать для вычислений при любых других исходных данных.

Список литературы

1. Плескунов М.А. Задачи сетевого планирования: учебное пособие. — Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2014.

2. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Исследование операций в экономике: учебное пособие для вузов / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. — М. : ЮНИТИ, 2003.